

TEST

ریاضیات کنکور

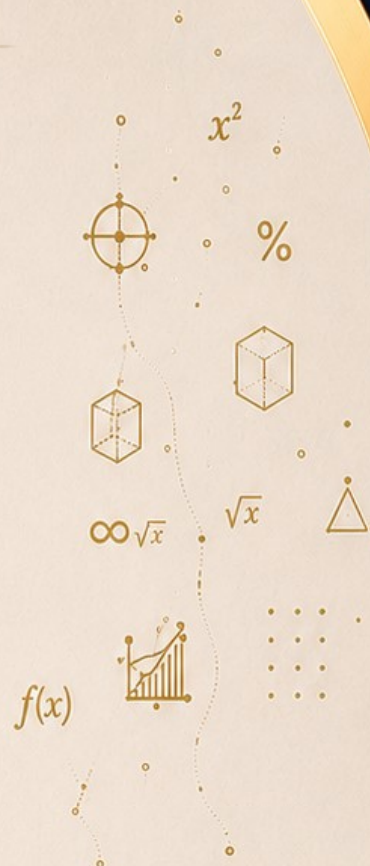
ریاضی پایه دهم

(نکته تست)

درسنامه جامع | نکات سرعتی | تست‌های منتخب

Dr. Ali Reza Noorediny

PhD in pure mathematics



ارتقای سطح
صفر تا صد



پوشش کنکور
و آزمون‌ها



دقیق
و هدفمند



محتوای بی نظیر ریاضیات کنکور تجربی

ارائه‌ای جدید از:

دکتر علی رضا نورالدینی

و تیم تألیف گروه آموزشی درس آموز

(دانش‌آموختگان دانشگاه صنعتی امیرکبیر)



این مجموعه:

تنها به صورت چاپ کلاسی

(تمام رنگی با بهترین کیفیت و تخفیف تا ۷۰ درصد)

قابل سفارش است.

«نسخه تدریس در دست دانش‌آموزان و نسخه خودآموز ویژه مدرس»

کسب اطلاعات فوری



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۲	مجموعه، الگو و دنباله مرجع و متمم، الگو و دنباله، دنباله حسابی و هندسی	۱
۵۸	مثلثات معرفی نسبت‌ها و دایره مثلثاتی، روابط بین نسبت‌ها	۲
۸۵	توان‌های گویا توان و ریشه و محاسبات، توان گویا، عبارت جبری	۳
۱۲۴	معادله و نامعادله معادله درجه دوم و سهمی، تعیین علامت و نامعادله	۴

۵	تابع مفهوم تابع، دامنه و ضابطه، چند نوع از توابع ساده	۱۶۶
۶	ترکیبیات اصل‌های شمارش، جایگشت، ترتیب و ترکیب	۱۹۷
۷	احتمال و آمار احتمال و قوانین، تکنیک‌های پُر تکرار، علم آمار	۲۳۵

مجموعه الگو و دنباله

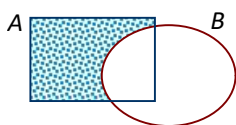
صفحه	فهرست
۳	■ زیرمجموعه‌های مهم $\mathbb{R}$
۱۲	■ مجموعه مربع و متمم
۱۹	■ الگو و دنباله
۲۶	■ دنباله‌های حسابی
۳۴	■ دنباله‌های هندسی
۴۴	■ ویژه صد درصدی‌ها

یادآوری:

مفاهیمی ساده و ضروری برای دو مجموعه A و B :

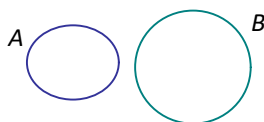
$A \cap B$ «مجموعه عضوهای مشترک»، $A \cup B$ «مجموعه عضوهایی که لااقل در یکی از آن دو باشند» و تفاضل $A - B$ «مجموعه اعضای A است که در B قرار ندارند».

در تفریق $A - B$ ، فقط عضوهای مشترک از A حذف می‌شوند؛ بنابراین:



$$A - B = A - (A \cap B)$$

حالت ویژه $A \cap B = \emptyset$ به صورت مقابل است:



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A - B = A$$

بدیهی است که:

خواص ساده: (بدیهی و کاربردی)

هر دوی A و B زیر مجموعه‌ی اجتماعشان هستند: $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$ و اشتراک، زیر مجموعه‌ی هر دوی A و B است.

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{و} \quad A \cap B \subseteq B$$

واضح است که: $A \cap B \subseteq A \cup B$ خواهد بود. بعلاوه:

$$\text{برابری } A \cap B = A \cup B \text{ معادل } A = B \text{ است.}$$

اگر $A \subseteq B$ باشد، موارد زیر همواره درستند:

$$A \cap B = A \quad \text{و} \quad A \cup B = B \quad \text{و} \quad A - B = \emptyset$$

برای نمونه:

ساده شده‌ی عبارت $A \cup (B \cap A)$ برابر A است، زیرا: $(B \cap A) \subseteq A$. به همین صورت: $(A \cup B) \cup B = A \cup B$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی و برخی زیر مجموعه‌های آن:

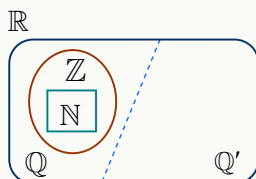
ایستگاه ۱: مجموعه‌های اعداد

اعداد گویا: از تقسیم دو عدد صحیح با مخرج غیر صفر ساخته می‌شوند:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

چون تمام عددهای صحیح، گویا هم هستند، پس: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

عدد گنگ: هر عددی که نتوان آن را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت. مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است که آن را با $\mathbb{Q}'$ نشان می‌دهیم.

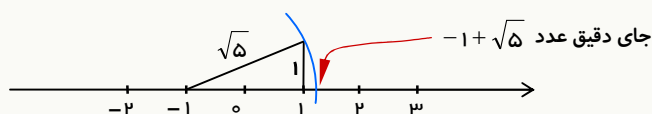
اعداد حقیقی: مجموعه‌ی متشکل از تمام عددهای گویا و گنگ:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

نمودار و ن کل اعداد به صورت مقابل:

نمایش اعداد گنگ: بسیاری از عددهای گنگ را می‌توان توسط رابطه‌ی فیثاغورس روی محور مشخص کرد.

برای نمونه، نمایش عدد $-1 + \sqrt{5}$ روی محور:



توجه: بین هر دو عدد دلخواه:

بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

توجه کنید:

- عددهای گویا در شکل اعشاری، یا مختوم هستند، مانند: $2/45$ یا رقم‌های اعشاری از جایی به بعد تکرار (تناوب) دارند، مانند: $2/333 \dots = 2/\overline{3}$ و $16/2535353 \dots = 16/2\overline{53}$. سایر عددهای اعشاری گنگ هستند.
- عددهای رادیکالی نظیر $\sqrt{2}$ ، $\sqrt[3]{9}$ و $\sqrt{\frac{8}{3}}$ که رادیکال قابل حذف نیست، گنگ هستند. همچنین، عددهایی نظیر $2 - \sqrt{3}$ و $\sqrt{2} + 1$ که از جمع و تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا به دست آمده‌اند. عدد π که تقریباً برابر $3/14$ است و در محاسبه‌ی محیط و مساحت دایره به کار می‌رود نیز گنگ است.
- برخی عددهای رادیکالی پس از ساده شدن به صورت گویا تبدیل می‌شوند، بنابراین این نوع عددهای رادیکالی، گویا هستند. برای نمونه:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \in \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$$

تیب سوالات

کدام عبارت صحیح نیست؟

- ① بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.
- ② بین هر دو عدد گنگ بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.
- ③ بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد صحیح وجود دارد.
- ④ بین هر دو عدد صحیح بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

گزینه ۳

با توجه به نکته‌ی قبل، موارد اول، دوم و چهارم درست هستند، اما برای نمونه؛
بین دو عدد گویای $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.
پس مورد سوم نادرست خواهد بود.

چند مورد زیر صحیح است؟

- (الف) $(\mathbb{Z} - W) \subseteq (\mathbb{Q} - \mathbb{Q}')$ (ب) $(\mathbb{Z} \cap W) - \mathbb{N} = \emptyset$
(پ) $\mathbb{Q}' \subseteq (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ (ت) $(\mathbb{Q} \cap W) \cap (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}) = \{0\}$

۴ ④

۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۲

پدرسی هر مورد:

(الف) درست است؛ چون سمت راست تمام $\mathbb{Q}$ و سمت چپ فقط عددهای صحیح منفی است.(ب) نادرست است؛ با ساده سازی $W - \mathbb{N} = \{0\}$ خواهد شد.(پ) درست است؛ چون در سمت راست، عددهای گنگ از $\mathbb{R}$ برداشته نشده‌اند.(ت) نادرست است؛ چون با ساده سازی $W \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ خواهد شد.

اگر $A = \mathbb{Q}' \cup \mathbb{Z}$ ، $B = \mathbb{Q} - \mathbb{N}$ و $C = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ باشد، کدام مورد نادرست است؟ $C - B = \mathbb{Q}'$ ④ $C - A = \mathbb{Q}$ ③ $A \cap C = \mathbb{Q}'$ ② $A \cup B = \mathbb{R}$ ①

گزینه ۳

باید هر مورد بررسی شود. بررسی گزینه‌ی سوم:

عددهای صحیح در C نیستند، پس در $C - A$ نیز قرار ندارند و در نتیجه $C - A$ شامل تمام عددهای گویا نیست.

زیر مجموعه‌های مهمی از $\mathbb{R}$:

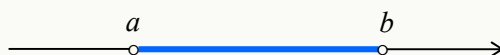
ایستگاه ۲: بازه‌های اعداد

بازه‌های کران‌دار:

ابتدا و انتهای این بازه‌ها با دو عدد مشخص می‌شود. مانند:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a, b)$$

بازه‌ی باز

بازه‌های نیم باز $[a, b)$ و $(a, b]$ و بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ به صورت مشابه تعریف می‌شوند. مانند:

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\} = [-1, 3)$$

بازه‌های بی کران:

این بازه‌ها از یک یا هر دو طرف تا بی‌نهایت ادامه دارند. مانند:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty)$$

سایر بازه‌های بی کران به صورت مشابه بیان می‌شوند: $(-\infty, a)$ و $(-\infty, a]$ و $[a, +\infty)$.

توجه:

(مجموعه تمام اعداد حقیقی)

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

بعلاوه، هر وقت لازم شد؛

برای بررسی دقیق یا محاسبات روی بازه‌ها، مانند اجتماع و اشتراک و ...، از نمایش روی محور کمک بگیرید.

تیب سوالات

❖ برای چه محدوده‌ای از a ، عدد ۱ عضو بازه‌ی $[a-2, 2a+1]$ است، ولی عدد صفر در این بازه قرار ندارد؟

$$(2, 3] \quad 4$$

$$(0, 2] \quad 3$$

$$(0, 3] \quad 2$$

$$(2, +\infty) \quad 1$$

گزینه ۴ ✓

پاید داشته باشیم:

$$0 < a-2 \leq 1 < 2a+1 \rightarrow \begin{cases} a-2 > 0 \Rightarrow a > 2 \\ a-2 \leq 1 \Rightarrow a \leq 3 \Rightarrow a \in (2, 3] \\ 2a+1 > 1 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$$

--- ❖ ---

❖ برای $A = (-3, 1]$ ، $B = (-\infty, -2]$ و $C = [-1, 1]$ ، مجموعه‌ی $(A \cup B) - C$ به صورت $(-\infty, -b) \cup \{a\}$ نوشته شده،مقدار $a+b$ کدام است؟

$$-1 \quad 4$$

$$0 \quad 3$$

$$2 \quad 2$$

$$1 \quad 1$$

گزینه ۲ ✓

خواهیم داشت: $A \cup B = (-\infty, 1]$ و بنابراین: $(A \cup B) - C = (-\infty, -1) \cup \{1\}$. پس $a=1$ و $b=1$ بوده و:

$$a+b=2$$

--- ❖ ---

❖ برای چند عدد طبیعی n ، بازه $(\frac{3-n}{4}, \frac{n+3}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟ (نوبت ۱-تجربی ۱۴۰۴)

$$4 \quad 4$$

$$3 \quad 3$$

$$2 \quad 2$$

$$1 \quad 1$$

گزینه ۱ ✓

بازه به صورت $(1 - \frac{n}{5}, 1 + \frac{3}{n})$ است؛ چند مقدار اولیه برای n را باید بررسی کنیم:

$$n=1: (1/5 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{1}) = (1, 4)$$

$$n=2: (1/5 - \frac{2}{2}, 1 + \frac{3}{2}) = (0/5, 2/5)$$

$$n=3: (1/5 - \frac{3}{2}, 1 + \frac{3}{3}) = (0, 2)$$

اولاً: در بین سه مقدار بالا، تنها $n=3$ قابل قبول است. **ثانیاً:** برای $n \geq 4$ بازه‌ی $(1/5 - \frac{n}{2}, 1 + \frac{3}{n})$ دو عدد صحیح ۰ و ۱ را همیشه

شامل است و بنابراین در کل هم فقط $n=3$ قابل قبول خواهد بود.

---◇---

◇ اگر $m < -1$ باشد، چند عدد صحیح در مجموعه‌ی $\left[\frac{1}{m}, -m\right] \cap \left[m, -\frac{1}{m}\right]$ قرار دارد؟

④ نامشخص

③ ۲

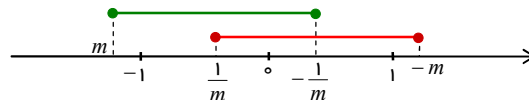
② ۱

① صفر

✓ گزینه ۲

با شرط $m < -1$:

- عدد $-\frac{1}{m}$ بین ۰ و ۱ قرار داشته و عدد $\frac{1}{m}$ بین ۰ و -۱ قرار می‌گیرد. (مثلاً برای $m = -2$ داریم: $\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$)
- عدد $-m > 1$ است.



فقط عدد صفر همیشه در اشتراک قرار دارد.

---◇---

◇ اگر $(1, 2 + a^2) \cap (4 - a^2, 5) = \emptyset$ باشد، آنگاه a متعلق به کدام بازه است؟

④ $[0, 1]$

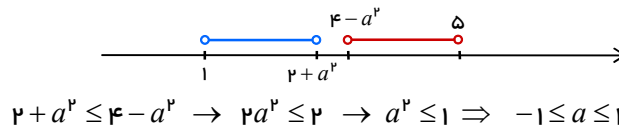
③ $[-1, 1]$

② $[1, \infty)$

① $(-\infty, 1]$

✓ گزینه ۳

در بازه‌ی سمت چپ، عددهای بزرگ‌تری وجود دارند و بنابراین باید وضعیتی شبیه زیر برقرار باشد تا اشتراک تهی گردد:



پس باید داشته باشیم:

$$2 + a^2 \leq 4 - a^2 \rightarrow 2a^2 \leq 2 \rightarrow a^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a \leq 1$$

---◇---

ایستگاه ۳: متناهی و نامتناهی

یک مجموعه متناهی (باپایان) است، هرگاه:

تعداد عضوهای آن با یک عدد بیان شود. (بقیه مجموعه‌ها بی‌پایان یا نامتناهی هستند.)

نمونه: مجموعه‌ی $\{1, 0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, \dots, 999\}$ متناهی، ولی $\{2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$ نامتناهی است.

- وقتی $a < b$ باشد، بازه‌هایی مانند (a, b) و $[a, b]$ همیشه نامتناهی هستند، ولی عددهای صحیح موجود در آن‌ها متناهی است.

فرض کنید: $A \subseteq B \subseteq C$ و به نتیجه گیری‌های ساده ولی مهم زیر توجه کنید:

- اگر B نامتناهی باشد، الزاماً C هم نامتناهی است. (در مورد A حکم قطعی نداریم).
- اگر B متناهی باشد، الزاماً A هم متناهی است. (C می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد).

برای نمونه:

چون $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ نامتناهی است، در نتیجه:

تمام مجموعه‌های $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{W}$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند. بعلاوه، $\mathbb{Q}'$ نیز نامتناهی است.

سؤال: اگر A و B متناهی باشند، واضح است که هر سه مجموعه $A \cup B$ ، $A \cap B$ و $A - B$ نیز متناهی هستند؛

وضعیت این سه مجموعه در حالت‌های زیر چگونه است؟ (با دلیل یا مثال نقض!)

الف) A و B هر دو نامتناهی. ب) A متناهی و B نامتناهی. پ) A نامتناهی و B متناهی.

تیب سوالات

چه تعداد از موارد زیر معرف یک مجموعه‌ی متناهی است؟

الف) مجموعه‌ی دوچرخه‌های موجود در کره‌ی زمین.

ب) مجموعه خطوطی که محور طول را در $x = -3$ قطع می‌کنند.

پ) مجموعه‌ی اعداد حقیقی در بازه‌ی $[-1, 2]$.

ت) مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3^{-x} > \frac{1}{3}\}$

ث) $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$

۵ ④

۴ ③

۳ ②

۲ ①

گزینه ۱

واضح است که موارد (پ)، (ت) و (ث) پی‌پایان و (الف) متناهی است. بررسی مورد (ب):

$$3^{-x} > \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

پس $A = \emptyset$ پوده و متناهی است.

کدام مجموعه بیانگر یک مجموعه‌ی متناهی است؟

② مجموعه مربع‌های با مساحت ۱۶

① مجموعه مثلث‌های با مساحت ۱۶

④ مجموعه خطوط با شیب -۱

③ مجموعه دایره‌های با شعاع ۵

گزینه ۲

در گزینه دوم، مجموعه فقط یک عضو دارد: $a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$ ، یعنی فقط مربع به ضلع ۴.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: باید $\frac{ha}{۲} = ۱۶$ یا $ha = ۳۲$ شود. واضح است که بی‌شمار مقدار گوناگون برای ارتفاع و قاعده این رابطه را برقرار می‌سازند.

گزینه ۳: می‌توان مرکز را نقاط گوناگون انتخاب کرد و بنابراین مجموعه نامتناهی است.

گزینه ۴: بی‌شمار خط موازی با خط $y = -x$ دارای شیب -۱ هستند.

--- ❖ ---

❖ کدام مورد همواره درست است؟

- ❶ اگر $A - B$ متناهی باشد، آنگاه A و B متناهی‌اند.
- ❷ اگر $A - B$ نامتناهی باشد، آنگاه A و B نامتناهی‌اند.
- ❸ اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آنگاه $A - B$ نامتناهی است.
- ❹ اگر A متناهی و B نامتناهی باشد، آنگاه $A - B$ نامتناهی است.

گزینه ۳ ✓

تتها در جمله‌ی سوم قطعیت وجود دارد:

چون B تعداد عضوهای محدودی دارد، اگر حتی تمام آن‌ها از A کم شوند، بازهم بی‌شمار عضو در $A - B$ باقی خواهد ماند.

--- ❖ ---

❖ اگر A متناهی و B و C نامتناهی باشند، کدام مورد همواره درست است؟

- ❶ $B - (A \cap C)$ متناهی است.
- ❷ $(A \cap B) \cup C$ نامتناهی است.
- ❸ $A \cap (B - C)$ نامتناهی است.
- ❹ $A \cap B$ و $B \cap C$ می‌توانند متناهی یا نامتناهی باشند.

گزینه ۲ ✓

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $A \cap C$ جزئی از A و در نتیجه متناهی است؛ چون B نامتناهی است، $B - (A \cap C)$ نیز نامتناهی خواهد بود.

گزینه ۲: $(A \cap B) \cup C$ نامتناهی است؛ چون شامل C است که خود نامتناهی است.

گزینه ۳ و ۴: $A \cap (B - C)$ جزئی از A و در نتیجه متناهی است. (رد گزینه ۳) یا همپن استدلال، $A \cap B$ هم قطعاً متناهی است. (رد گزینه ۴)

--- ❖ ---

تمرین تست (۱)



۱- برای مجموعه‌های $A = \mathbb{Q}' \cup \mathbb{N}$ و $B = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ ، کدام عدد در مجموعه $A \cup B$ قرار ندارد؟

- ① $0/1$ ② $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ③ $\frac{-2}{\sqrt[3]{3}}$ ④ -1

۲- n را بزرگ‌ترین عضو $\mathbb{Z} - W$ و m را کوچک‌ترین عضو مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2, 2^x < 16\}$ بگیرید. مقدار n^m کدام است؟

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1

۳- اگر $A = [0, 4]$ ، $B = (-2, 3]$ و $C = [1, 5)$ باشد، حاصل $(A \cap C) \cup B$ کدام است؟

- ① $(-2, 3]$ ② $(-2, 5]$ ③ $(-2, 4]$ ④ $(1, 3)$

۴- اگر $A_n = (0, 1 + \frac{1}{n}]$ ، آنگاه $(A_3 \cup A_2 \cup A_1) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ با کدام بازه برابر است؟

- ① $(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}]$ ② $[\frac{5}{4}, \frac{4}{3}]$ ③ $(\frac{5}{4}, 2]$ ④ $[\frac{5}{4}, 2]$

۵- اگر $(b, 4) \cap (-2, a) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ باشد، حاصل $(b, a) \cup (-2a - 1, b)$ کدام است؟

- ① $(-3, 1)$ ② $(-2, \frac{1}{2}) - \{-\frac{1}{3}\}$ ③ $(1, 4)$ ④ $(-2, \frac{1}{2})$

۶- اگر دو مجموعه $A = (-3, 4) - \{-1\}$ و $B = (a + b, 2a - b) \cup (b - a, -a)$ برابر باشند، حاصل ab کدام است؟

- ① $\frac{20}{9}$ ② 2 ③ -2 ④ -1

۷- اگر اجتماع دو بازه $(-\infty, 1]$ و $(\frac{3a-4}{2}, \infty)$ برابر مجموعه‌ی اعداد حقیقی شود، کدام یک درست است؟

- ① $a \leq 1$ ② $a \leq 2$ ③ $a < 2$ ④ $a = 2$

۸- اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه $[a^4, a^3] \cap (a^2, a)$ کدام است؟

- ① $\{a^2\}$ ② (a^4, a) ③ (a^3, a^2) ④ $\emptyset$

۸- با فرض $-1 < x < 0$ ، ساده شده‌ی عبارت $(x, \frac{1}{x^2}) \cap (x^2, \frac{1}{x^4})$ کدام است؟

- ① $(x^2, \frac{1}{x^2})$ ② $(x^2, \frac{1}{x^4})$ ③ $(x, \frac{1}{x^2})$ ④ $(x, \frac{1}{x^4})$

۹- اگر $n \in \mathbb{N}$ و بازه $(\frac{1}{n}, \frac{n+2}{2})$ تنها شامل یک عدد طبیعی باشد، چند مقدار برای n وجود دارد؟

- ۱ ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④ بی شمار

۱۰- چند عدد طبیعی می‌توان برای n پیدا کرد به طوری که بازه $(n, \frac{n+3}{3})$ شامل عدد طبیعی نباشد؟

- ۱ ① صفر ۲ ② ۱ ۳ ③ ۲ ۴ ④ بی شمار

۱۱- برای دو مجموعه A و B می‌دانیم $A-B$ و $A \cap B$ متناهی هستند. کدام مورد همواره درست است؟

- ① A و B متناهی هستند. ② A متناهی و B نامتناهی است. ③ A متناهی است. ④ B متناهی است.

۱۲- به ازای چند مقدار طبیعی m ، اشتراک دو بازه $A = [\frac{4}{m+1}, +\infty)$ و $B = (-\infty, \frac{5}{m+2}]$ یک مجموعه‌ی متناهی است؟

(نوبت ۲- تجربی ۱۴۰۴)

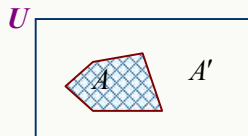
- ۱ ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ ۴

۱۳- به ازای چند مقدار طبیعی a ، عدد $\frac{1}{5}$ در بازه $(\frac{1}{3a+1}, \frac{1}{2a-3})$ قرار دارد؟ (تجربی ۱۴۰۵)

- ۱ ① ۲ ② ۳ ③ ۴ ④

دو مفهوم پر کاربرد در مبحث مجموعه‌ها:

ایستگاه ۱: مرجع و متمم

مجموعه‌ی مرجع: با نماد U (گاهی M)، مجموعه‌ای است که:اعضای همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث ما در آن قرار دارند. (تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی U هستند).مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «متمم» A گوئیم:

$$A' = U - A$$

برای نمونه:اگر $\mathbb{Z}$ را مرجع بگیریم، در این صورت متمم W (اعداد حسابی) برابر $\{-1, -2, -3, \dots\}$ است. (عددهای صحیح منفی)**خواص ساده:** (با توجه به شکل)در مورد هر مجموعه‌ی A ، موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cup A' = U \quad \text{و} \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{و} \quad (A')' = A$$

علاوه، $\emptyset' = U$ است، زیرا: $\emptyset' = U - \emptyset = U$. همچنین $U' = \emptyset$ است، زیرا: $U' = U - U = \emptyset$ **روابط دیگر:**اولاً، رابطه‌ی مهم $A - B = A \cap B'$ تفاضل مجموعه‌ها را به اشتراک تبدیل می‌کند. توسط آن به آسانی می-توان نشان داد: $A' - B' = B - A$ **ثانیاً:** قوانین «دمورگان» به صورت زیر، کاربردهای زیادی دارند:

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{و} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

بنابراین:روابط $A \cap B' = A - B = A - (A \cap B)$ همیشه درست هستند.**سؤال:** اگر U نامتناهی و A یک مجموعه متناهی باشد، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن A' چه می‌توان گفت؟ (اگر A

نامتناهی باشد، چطور؟) یا دلیل یا مثال نقض!

تیپ سوالات

اگر A متناهی و B و C نامتناهی باشند، کدام مجموعه الزاماً نامتناهی است؟

④ $(A' \cup B)'$

③ $C \cap A'$

② $C \cap B$

① $A \cap B$

گزینه ۳

پدرسی گزینه‌ها:

گزینه ۱: $A \cap B$ جزئی از A و در نتیجه متناهی است.**گزینه ۲:** اشتراک دو مجموعه نامتناهی ممکن است تعداد متناهی یا بدون عضو باشد. (مانند: اعداد صحیح منفی و مثبت)

گزینه ۳: چون $C \cap A' = C - A$ است، از C حداکثر تعداد متناهی عضو کم شده و حاصل نامتناهی است. (جواب تست)

گزینه ۴: طبق رابطه دمورگان $(A' \cup B)' = (A')' \cap B' = A - B$ و به وضوح متناهی است.

--- ❖ ---

❖ اگر A و B دو مجموعه‌ی ناتهی از مجموعه مرجع U باشند، مجموعه‌ی $(A \cup B) \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B])$ با کدام مجموعه برابر است؟

$A \cup B$ ④

$B - A$ ③

$(A - B)'$ ②

$\emptyset$ ①

گزینه ۴ ✓

عبارت را با مقایسه جملات به صورت مرحله‌ای ساده می‌کنیم:

$$(A \cup B) \cup ((B \cap A) \cap \underbrace{[(B \cup A) \cap B]}_{=B})$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=B \cap A}$$

چون $B \cap A \subseteq (A \cup B)$ است، اجتماعشان $A \cup B$ خواهد بود.

--- ❖ ---

❖ اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\}$ و $B = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ ، تعداد زیر مجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟ (ریاضی ۹۸)

۳۲ ④

۱۶ ③

۸ ②

۴ ①

گزینه ۳ ✓

طبق نکته‌ی قبل:

$$A \cap B' = A - B = \{1, 2, \{1, \{1, 2\}\}, \{2\}\} \Rightarrow 2^4 = 16$$

--- ❖ ---

❖ متمم مجموعه‌ی $(B - A)' \cap A$ برابر کدام است؟

$B' \cap A'$ ④

$A \cap B'$ ③

$A' \cup B$ ②

A' ①

گزینه ۱ ✓

ساده سازی با تبدیل تقاضل به اشتراک و سپس دمورگان:

$$(B - A)' \cap A = (B \cap A')' \cap A = (B' \cup A) \cap A$$

چون A جزئی، یعنی زیرمجموعه $B' \cup A$ است، حاصل A بوده و جواب A' است.

--- ❖ ---

نمادهای $n(A)$ و $|A|$ هر دو تعداد عضوهای مجموعه A را نشان می‌دهند.

ایستگاه ۲: تعداد عضوها

روابط شمارشی در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها:

♦ رابطه ۱: چون A و A' بر خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

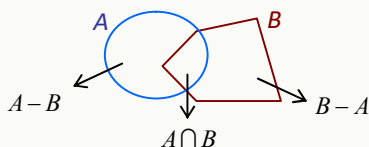
♦ رابطه ۲: تعداد عضوهای A و B که حداقل در یکی باشند:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

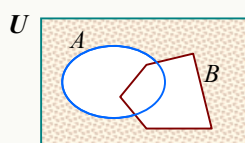
در حالتی که A و B عضو مشترک ندارند، (یعنی: $A \cap B = \emptyset$):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

♦ رابطه ۳: تعداد عضوهای A که فقط در A باشند:



$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



♦ رابطه ۴: عضوهای A که در هیچ‌یک از دو مجموعه قرار ندارند، دقیقاً

خارج $A \cup B$ هستند. بنابراین تعداد چنین عضوهای برابر است با:

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$

توجه کنید:

بیان دیگر رابطه آخر: عضوهای که «در A نیستند و در B نیستند» این مجموعه در واقع $A' \cap B'$ است.

دو حالت خاص:

الف) تعداد عضوهای A و B که فقط (یا: دقیقاً) در یکی از A و B هستند:

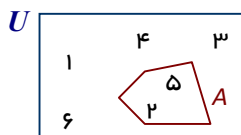
$$n(A - B) + n(B - A) = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$$

ب) تعداد عضوهای A و B که حداکثر در یکی از A و B هستند، (یعنی: در $A \cap B$ نباشند). برابر است با:

$$n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B)$$

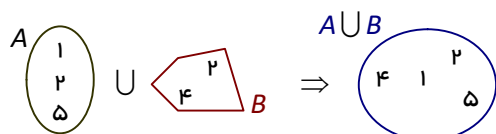
چند نمونه:

۱) در شکل مقابل می‌بینید:



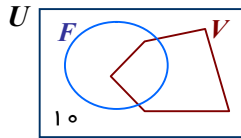
$$n(A') = n(U) - n(A) = 6 - 2 = 4$$

و در شکل زیر:



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 3 + 2 - 1 = 4 \end{aligned}$$

۷) کلاسی ۳۲ دانش‌آموز دارد. اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر هم عضو هیچ تیمی نباشند:



$$n(U) = 32$$

الف) چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال عضو هستند؟
چون کلاس ۳۲ نفر است و ۱۰ نفر هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند، تعداد کل افراد فوتبال یا والیبال $32 - 10 = 22$ نفر خواهد بود.
پس داریم:

$$n(F) = 13 \text{ و } n(V) = 14 \text{ و } n(F \cup V) = 22$$

تعداد افراد فعال در هر دو ورزش، یعنی $n(F \cap V)$

$$n(F \cup V) = n(F) + n(V) - n(F \cap V) \rightarrow 22 = 13 + 14 - n(F \cap V)$$

$$\Rightarrow n(F \cap V) = 27 - 22 = 5$$

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، همان $n(F - V)$ است:

$$n(F - V) = n(F) - n(F \cap V) = 13 - 5 = 8$$

پ) چند نفر فقط عضو یک تیم هستند؟

$$n(F) + n(V) - 2n(F \cap V) = 13 + 14 - 2(5) = 17$$

تیب سوالات

❓ اگر $n(A \cap B) = 4$ و $n(A \cup B) = 20$ باشد، حاصل $n(A - B) + n(B - A)$ کدام است؟

۱۲ ④

۲۴ ③

۱۶ ②

۱۰ ①

گزینه ۲

رابطه‌ی مربوط به تقاض را دو پار می‌نویسیم:

$$n(A - B) + n(B - A) = \underbrace{n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)}_{=n(A \cup B)} = 20 - 4 = 16$$

--- ❓ ---

❓ اگر $n(A) = 4$ و $n(A \cup B) = 13$ باشد، محدوده‌ی $n(B)$ کدام است؟

$0 \leq n(B) \leq 9$ ④

$4 \leq n(B) \leq 9$ ③

$0 \leq n(B) \leq 13$ ②

$9 \leq n(B) \leq 13$ ①

گزینه ۱

$$13 = 4 + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow n(B) - n(A \cap B) = 9$$

اگر $n(A \cap B) = 0$ باشد، کمترین مقدار $n(B) = 9$ و با توجه به $n(A \cap B) \leq n(A) = 4$ ، اگر $n(A \cap B) = 4$ باشد، بیشترین مقدار $n(B)$ حاصل خواهد شد:

$$n(B) = n(A \cap B) + 9 = 4 + 9 = 13$$

--- ❓ ---

توجه کنید:

استفاده از نمودار ون و نمایش تعداد اعضای هر بخش روی آن، استفاده از فرمول‌ها و پاسخ‌گویی را بسیار آسان‌تر می‌کند.

اجتماع دو مجموعه A و B دارای ۳۰ عضو بوده، $A - B$ دارای ۷ و $A \cap B$ دارای ۵ عضو است. اگر از هر کدام از دو مجموعه پنج عضو برداشته شود، از اشتراک آن‌ها ۲ عضو کم می‌شود. اجتماع مجموعه‌های جدید A و B چند عضوی است؟

۱۸ ④

۲۱ ③

۱۹ ②

۲۲ ①

گزینه ۱

بهتر است از نمودار ون و نمایش تعداد روی شکل کمک بگیریم:



جواب طبق شکل جدید واضح است:

$$4 + 3 + 15 = 22$$

--- ④ ---

در یک جمع، ۴۰ درصد افراد عضو گروه سرود و ۷۰ درصد عضو گروه ورزشی هستند. چند درصد افراد جمع فقط عضو گروه ورزشی هستند؟

۶۰ ④ حداکثر

۴۰ ③ حداکثر

۴۰ ② حداقل

۶۰ ① حداقل

گزینه ۴

درصد مشترک «سرود و ورزشی» را مجهول a گرفته و نمایش تصویری:

توجه کنید:

(مقدار $a - 10$ از تفاضل $(40 - a + a + 70 - a)$ حاصل شده است.)

چون باید $a - 10 \geq 0$ باشد، بنابراین:

$$a \geq 10 \rightarrow -a \leq -10 \xrightarrow{+70} 70 - a \leq 60$$

--- ④ ---

اگر $n(A \cap B) = x$ و $n(A - B) = \frac{1}{3}n(A \cap B)$ و $n(B - A) = \frac{1}{4}n(A \cap B)$ باشد، تعداد اعضای مجموعه A کدام است؟

(تجربی نوبت ۱ - ۱۴۰۳)

۴۸ ④

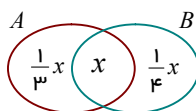
۴۵ ③

۳۶ ②

۳۳ ①

گزینه ۴

قرار داده: $n(A \cap B) = x$ و چون $n(A - B) = \frac{1}{3}n(A \cap B)$ و $n(B - A) = \frac{1}{4}n(A \cap B)$ است،



با نگاه به شکل:

$$n(A \cup B) = \frac{1}{3}x + x + \frac{1}{4}x \rightarrow \frac{19}{12}x = 57 \Rightarrow x = 36$$

در نتیجه:

$$n(A) = \frac{1}{3}x + x = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \times 36 = 48$$

---◇---

◇ در یک کلاس، نصف دانش آموزان به ورزش فوتبال، $\frac{3}{8}$ دانش آموزان به ورزش والیبال و $\frac{1}{8}$ دانش آموزان به هر دو ورزش علاقمند هستند. اگر ۱۰ نفر به هیچ یک از دو ورزش علاقمند نباشند، تعداد دانش آموزانی که به هر دو ورزش علاقمند هستند، کدام است؟

۵ ④

۱۵ ③

۲۰ ②

۱۰ ①

گزینه ۴

اگر کلاس را یک واحد در نظر بگیریم، نسبت تعداد دانش آموزانی که به هیچ ورزشی علاقه ندارند:

$$n(U) - [n(F) + n(V) - n(F \cap V)] \rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}\right) = 1 - \frac{4+3-1}{8} = \frac{1}{4}$$

یعنی: $\frac{1}{4}$ کلاس ۱۰ نفر بوده و در نتیجه کلاس ۴۰ نفر است. $\frac{1}{8}$ (این کلاس برابر است با:

$$\frac{1}{8} \times 40 = 5$$

---◇---

تمرین تست (۲)



۱- اگر $A_n = \{n, n+1, \dots, n+9\}$ ، متمم مجموعه $A_4 \cap A_5 \cap A_6$ در مجموعه اعداد طبیعی نابیشتر از ۵۰، چند عضو دارد؟

۴۲ ④

۴۰ ③

۳۸ ②

۳۷ ①

۲- اگر $(0, +\infty)$ مجموعه مرجع باشد، $A = (3, 4)$ و $B = (2, +\infty)$ مجموعه $A' - B'$ کدام است؟

$(3, 4]$ ④

$(2, 3] \cup [4, +\infty)$ ③

$[2, 3]$ ②

$[2, 3) \cup (4, +\infty)$ ①

۳- اگر مجموعه مرجع $\mathbb{Z}$ باشد و $A' = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B' = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ ، آنگاه مجموعه $(A \cup B)'$ کدام است؟

$\{3, 4\}$ ④

$\{3, 4, 5, 6\}$ ③

$\{3, 4, 5\}$ ②

$\{1, 2, 3\}$ ①

۴- اگر مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ باشد و دو مجموعه $(-\infty, 2]$ و $(\frac{2a-3}{5}, +\infty)$ متمم یکدیگر باشند، کدام درست است؟

$a \leq 3/5$ ④

$a = 3/5$ ③

$a = 6/5$ ②

$a \leq 6/5$ ①

۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 6\}$ و $B = [-5, 6]$ باشد، مجموعه $A' - B'$ شامل چند عدد صحیح است؟

۵ ④

۸ ③

۹ ②

۱۰ ①

۶- A و B دو مجموعه ناتهی و $A \cap B = \emptyset$ است. کدام رابطه نادرست است؟

$A \subset B'$ ④

$A - B' = \emptyset$ ③

$A \cap B' = A$ ②

$(A \cup B)' = \emptyset$ ①

۷- در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعه چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعه چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعه چای دارند. (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند). (نوبت ۱- تجربی ۱۴۰۲)

- ۱ ۱۰۰ ۲ ۱۳۵ ۳ ۲۳۵ ۴ ۲۷۰

۸- مجموعه $A \cap B$ دارای ۳ عضو، مجموعه $A \cup B$ دارای ۶ عضو و مجموعه $A \cap B'$ تعداد ۱ عضو دارد. مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۴ ۲ ۳ ۳ ۲ ۴ ۱

۹- مجموعه $A - B$ دارای ۱ عضو، مجموعه $B - A$ دارای ۲ عضو و $A \cap B$ دارای ۳ عضو بوده، مجموعه B چند عضو دارد؟

- ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

۱۰- در یک کلاس ۵۰ نفر، ۳۰ نفر به فوتبال و ۳۵ نفر به والیبال علاقه دارند. اگر ۱۰ نفر به هیچ رشته‌ای علاقه نداشته باشند، چند نفر به هر دو رشته علاقه دارند؟

- ۱ ۱۰ ۲ ۲۰ ۳ ۲۵ ۴ ۳۰

۱۱- شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۴۰ و ۵۶ را در نظر بگیرید. توصیف‌های «عددهایی که لااقل شمارنده‌ی یکی از این دو عدد باشند» و «عددهایی که فقط شمارنده‌ی ۵۶ باشند» به ترتیب چند عضو دارند؟

- ۱ ۲۰ و ۸ ۲ ۱۲ و ۸ ۳ ۱۲ و ۴ ۴ ۲۰ و ۴

۱۲- اگر $n(A') = 2x + 3$ ، $n(A \cup B) = 3x + 1$ و $n(A' \cup B') = 5x - 4$ باشد، $n(B)$ کدام است؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۱۳- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند؟ (ریاضی ۹۸)

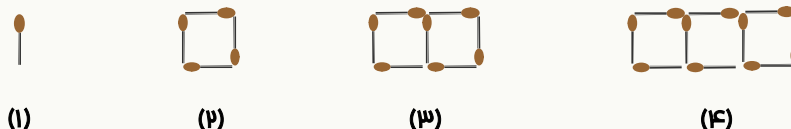
- ۱ ۱۵ ۲ ۱۶ ۳ ۱۷ ۴ ۱۸

۱۴- مجموعه‌های A و B به ترتیب دارای m و k عضو هستند. اگر $m - k = 14$ و اختلاف تعداد اعضای مجموعه‌های $A \cup B$ و $A \cap B$ برابر ۲۰ باشد، مجموعه $B - A$ چند عضو دارد؟ (نوبت ۲- تجربی ۱۴۰۲)

- ۱ ۸ ۲ ۶ ۳ ۴ ۴ ۳

الگو نویسی با مقایسه شماره شکل‌ها و تعداد اجزای آن‌ها انجام می‌شود:

ایستگاه ۱: الگو نویسی



در شکل‌های بالا:

تعداد چوب کبریت‌ها در هر مرحله ۳ مورد اضافه می‌شود:

$$\underbrace{1}_{(1)}, \underbrace{1+1 \times 3}_{(2)}, \underbrace{1+2 \times 3}_{(3)}, \underbrace{1+3 \times 3}_{(4)}, \underbrace{1+4 \times 3}_{(5)}, \dots$$

بنابراین تعداد در شکل دهم برابر $1+9 \times 3 = 28$ و تعداد آن‌ها در شکل n ام برابر است با:

$$t_n = 1 + (n-1) \times 3 \Rightarrow t_n = 3n - 2$$

الگوی خطی: به صورت $t_n = an + b$ ، یک عبارت درجه اول بر حسب n است. مانند:

$$1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots \Rightarrow t_n = 3n-2$$

سایر الگوها غیر خطی هستند؛ نظیر:

$$2, 5, 10, 17, \dots, n^2+1, \dots \Rightarrow t_n = n^2+1$$

تیب سوالات

❓ اگر در یک الگوی خطی، جمله‌ی اول ۳ و جمله‌ی پنجم آن ۵- باشد، جمله‌ی شماره‌ی در آن برابر ۳۹- است.

۱۲ ④

۲۲ ③

۲۱ ②

۱۱ ①

گزینه ۳

الگو را به صورت $t_n = an + b$ بپذیرید:

$$t_1 = 3: \quad a(1) + b = 3 \rightarrow a + b = 3$$

$$t_5 = -5: \quad a(5) + b = -5 \rightarrow 5a + b = -5$$

با حل دستگاه خواهیم داشت: $a = -2$ و $b = 5$. پس الگو به صورت $t_n = -2n + 5$ است و باید معادله‌ی $t_n = -39$ حل شود:

$$-2n + 5 = -39 \rightarrow -2n = -44 \Rightarrow n = 22$$

--- ❖ ---

❓ در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهاردهم، چهار برابر جمله‌ی سوم است. در این الگو، نسبت جمله‌ی بیست و دوم به جمله‌ی

پنجم کدام است؟

۷ ④

۶ ③

۵ ②

۴ ①

گزینه ۱

در الگوی $t_n = an + b$ ، باید $t_{14} = 4t_3$ باشد:

$$14a + b = 4(3a + b) \Rightarrow 2a = 3b$$

اکنون نسبت مورد نظر حساب می‌شود:

$$\frac{t_{22}}{t_5} = \frac{22a + b}{5a + b} \times \frac{2}{5} = \frac{22(2a) + 2b}{5(2a) + 2b} = \frac{22(3b) + 2b}{5(3b) + 2b} = \frac{68b}{17b} = 4$$

--- ❖ ---

❖ اگر $a_n = (6 - 2k)n^2 + 3n + 5 - k$ یک الگوی خطی باشد، حاصل ضرب شش جمله‌ی اول دنباله‌ی $t_n = \frac{k(-1)^{n+1}n}{n+1}$

کدام است؟

④ $-\frac{729}{7}$

③ $-\frac{18}{5049}$

② $\frac{18}{5049}$

① $\frac{729}{7}$

گزینه ۴

دنباله خطی نمی‌تواند شامل جمله‌ی n^2 باشد؛ $k = 3 \Rightarrow 6 - 2k = 0$ پس $t_n = \frac{(-1)^{n+1}3n}{n+1}$ بوده و:

$$t_1 \times t_2 \times \dots \times t_6 = \frac{3}{2} \times \frac{-6}{3} \times \dots \times \frac{-18}{7}$$

چون سه کسر منفی هستند، حاصل ضرب منفی است؛ علاوه، اگر از صورت هر کسر یک ضریب را بیرون بیاوریم، داریم:

$$-3^6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{6}{7} = -3^6 \times \frac{1}{7} = -\frac{729}{7} \quad (\text{عبارت } 2 \times 3 \times \dots \times 6 \text{ در صورت مخرج با هم ساده شده!})$$

--- ❖ ---

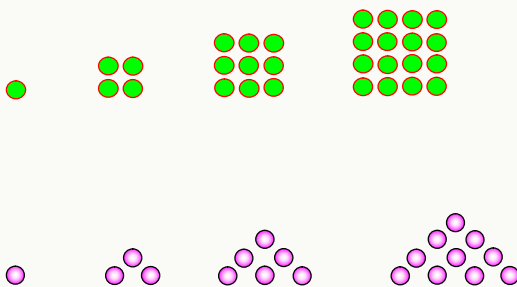
ایستگاه ۲: الگوهای غیرخطی

چند الگوی غیرخطی:

الگوی مربعی: به صورت $1, 4, 9, 16, \dots$

کل به شکل $t_n = n^2$ است.

الگوی مثلثی: به صورت شکلی زیر نمایش داده می‌شود:



نمایش جملات آن به صورت $1, 3, 6, 10, \dots$ و جمله‌ی کلی آن:

$$t_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الگوی درجه دوم: جمله‌ی عمومی آن درجه دوم است: $t_n = an^2 + bn + c$. با داشتن سه جمله از آن، از حل

دستگاه، مقادیر a, b و c معلوم شده و الگو به صورت کامل مشخص می‌شود.

شکل اول 1×3 ، در شکل دوم $(1) + 2 \times 4$ ، در شکل سوم $(1+2) + 3 \times 5$ و ...

پس الگوی کلی به صورت $t_n = n(n+2) + \underbrace{(1+2+\dots+n-1)}_{\frac{(n-1)n}{2}}$ خواهد بود و بنابراین:

$$t_9 = 9 \times 11 + \frac{8 \times 9}{2} = 99 + 36 = 135$$

--- 7 ---

الگوی درجه دوم $10, 13, 18, 25, \dots$ چند جمله‌ی سه رقمی دارد؟

۲۰ ④

۲۱ ③

۲۲ ②

۲۳ ①

گزینه ۲ ✓

الگو به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ گرفته و با جایگذاری $n = 1, 2, 3$ خواهیم داشت:

$$(1) \quad a + b + c = 10 \quad \text{و} \quad (2) \quad 4a + 2b + c = 13 \quad \text{و} \quad (3) \quad 9a + 3b + c = 18$$

برای تعیین مقادیر، با کم کردن (۱) از (۲) و (۲) از (۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ 5a + b = 5 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 1, b = 0 \xrightarrow{a+b+c=10} c = 9$$

پس الگو به صورت $n^2 + 9$ بوده است. تعیین تعداد جملات سه رقمی:

$$100 \leq n^2 + 9 \leq 999 \rightarrow 91 \leq n^2 \leq 990 \xrightarrow{\sqrt{990} \approx 31.4} 10 \leq n \leq 31 \Rightarrow n = 10, 11, \dots, 31$$

--- 7 ---

در الگوی درجه دوم $12, 13, 2, -2, \dots$ اختلاف جملات هفتم و نهم چقدر است؟

۶۰ ④

۶۱ ③

۶۲ ②

۶۳ ①

گزینه ۲ ✓

اختلاف جملات متوالی: $9, 5, \dots$ باید الگوی خطی باشد. این الگو به آسانی به صورت $t_n = 4n + 1$ نوشته شده و:

$$a_9 - a_5 = \underbrace{a_9 - a_4}_{t_4} + \underbrace{a_4 - a_5}_{t_5} = 4(4) + 1 + 4(5) + 1 = 62$$

--- 7 ---

ایستگاه ۳: دنباله اعداد

در یک دنباله a_n ، اولین جمله a_1 ، دومین جمله a_2 و ... بوده و نمایش آن چنین است:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

a_n «جمله عمومی» یا «جمله n ام» است.

دنباله $a_1, a_2, a_3, \dots$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

○ دنباله را «معدودی» گویند، هرگاه: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

جملات افزایشی یا برابری. (یعنی: نمی‌توانند کم شوند!)

$$a_1 \geq a_p \geq a_s \geq \dots$$

○ دنباله «نزولی» است، هرگاه:

جملات کاهشی یا برابرند. (یعنی: نمی‌توانند زیاد شوند!)

دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، «یکنوا» نامیده می‌شود.

حالت خاص:

دنباله‌ی عددی ثابت، هم صعودی و هم نزولی است.

مانند:

$$-1, -1, -1, \dots \quad \text{یا} \quad 4, 4, 4, \dots$$

تیب سوالات

❓ در دنباله‌ی $a_n = \frac{22-3n}{3+n}$ چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

۷ ④

۸ ③

۹ ②

۶ ①

گزینه ۴ ✓

باید نامساوی زیر برقرار شود: $\frac{22-3n}{3+n} > 0$. چون مخارج همواره مثبت است، کافی است صورت کسر هم مثبت باشد:

$$22-3n > 0 \rightarrow -3n > -22 \rightarrow n < \frac{22}{3} \cong 7/3$$

پس: جواب عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ است.

--- ❓ ---

❓ اگر در یک دنباله $a_{2n-5} = \frac{n+3}{2n+3}$ باشد، جمله‌ی هفتم آن کدام است؟

$\frac{8}{13}$ ④

$\frac{3}{5}$ ③

$\frac{14}{25}$ ②

$\frac{5}{9}$ ①

گزینه ۳ ✓

چون a_7 خواسته شده، قرار می‌دهیم:

$$2n-5=7 \Rightarrow n=6$$

پس برای $n=6$ خواهیم داشت:

$$a_{2(6)-5} = \frac{6+3}{2(6)+3} \Rightarrow a_7 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

--- ❓ ---

توجه کنید:

در معرفی بازگشتی یک دنباله، برای تعیین هر جمله، به اطلاعاتی از جملات قبلی نیاز است. برای نمونه:

پنج جمله‌ی اول از دنباله‌ی بازگشتی $t_n = -2t_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$) را می‌نویسیم:

قرار می‌دهیم $n=2$ و از فرض $t_1 = -1$ استفاده می‌کنیم:

$$t_p = -2t_1 + 1 = -2(-1) + 1 = 3$$

به صورت مشابه:

$$n = 3: t_3 = -2t_2 + 1 = -2(3) + 1 = -5$$

$$n = 4: t_4 = -2t_3 + 1 = -2(-5) + 1 = 11$$

$$n = 5: t_5 = -2t_4 + 1 = -2(11) + 1 = -21$$

❓ فرض کنید جمله ی صدم دنباله ی بازگشتی $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ با شرط $a_1 = 1$ برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جمله ی نود و هشتم دنباله کدام

است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$$\frac{2m-k}{k-m} \quad 4$$

$$\frac{k-m}{k-2m} \quad 3$$

$$\frac{k-2m}{k-m} \quad 2$$

$$\frac{k-m}{2m-k} \quad 1$$

گزینه ۱

جمله ی نود و هشتم باید از رابطه ی $a_{99} = \frac{1}{a_{98}} + 1$ تعیین شود؛

$$\frac{1}{a_{98}} = a_{99} - 1 \Rightarrow a_{98} = \frac{1}{a_{99} - 1}$$

پس جمله ی نود و نهم مورد نیاز است:

$$a_{100} = \frac{1}{a_{99}} + 1 \rightarrow \frac{1}{a_{99}} = \frac{k}{m} - 1 = \frac{k-m}{m} \Rightarrow a_{99} = \frac{m}{k-m}$$

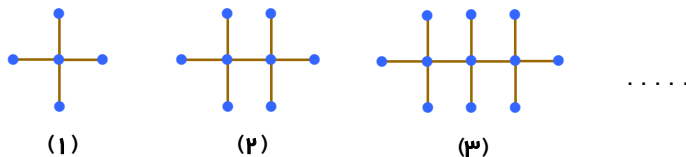
پنجاه و یک:

$$a_{98} = \frac{1}{a_{99} - 1} = \frac{1}{\frac{m}{k-m} - 1} = \frac{1}{\frac{m-k+m}{k-m}} = \frac{k-m}{2m-k}$$

تمرین تست (۳)



۱- تعداد نقاط در شکل بیستم الگوی زیر کدام است؟



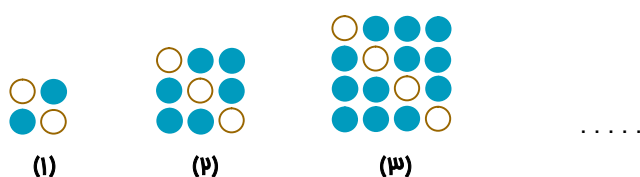
$$60 \quad 1$$

$$61 \quad 2$$

$$62 \quad 3$$

$$64 \quad 4$$

۲- تعداد گوی های رنگی در شکل n ام الگوی زیر کدام است؟



$$n^2 \quad 1$$

$$2n^2 - 1 \quad 2$$

$$n^2 - n \quad 3$$

$$n^2 + n \quad 4$$

۳- در دنباله‌ی خطی t_n داریم: $t_{n+2} - nt_{n-3} = 2n^2 - 9n - 3$. جمله‌ی دهم کدام است؟

- ① ۱۹ ② -۱۹ ③ -۲۳ ④ ۲۳

۴- در دنباله‌ی $t_n = 140n - 5n^2$ چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟

- ① صفر ② بی‌شمار ③ ۲۸ ④ ۲۷

۵- جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + 2$ برابر $2/04$ است؟

- ① ۲۳ ② ۲۴ ③ ۳۰ ④ ۴۰

۶- کدام یک می‌تواند جمله‌ی عمومی دنباله‌ی روبه‌رو باشد؟

- ① $2n^2 - 5n + 5$ ② $n^2 - (-1)^n$ ③ $3n^2 - 8n + 7$ ④ $n+1$

۷- در دنباله‌ای بازگشتی، عدد ۱ جمله‌ی اول است و داریم: $t_{n+1} = t_n + n + 1$. جمله‌ی دهم کدام است؟

- ① ۱۰۰ ② ۱۱۰ ③ ۵۰ ④ ۵۵

در این بخش و بخش بعدی، دو نوع خاص از دنباله را بررسی می‌کنیم که «**تَمَاعُد**» نیز نامیده می‌شوند.

ایستگاه ۱: دنباله‌ی حسابی

در «دنباله‌ی حسابی» یا نام دیگر آن «دنباله‌ی عددی»:

اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت به نام قدرنسبت (d) است: $d = a_p - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$
 $(a_1 = -2, d = 3) \quad -2, 1, 4, 7, 10, \dots$

توجه:

هر جمله با d جمع شده تا جمله‌ی بعد حاصل گردد. پس اگر جمله‌ی اول را با a نشان دهیم، شکل کلی دنباله چنین است:

$$\underbrace{a_1}_{a_1}, \underbrace{a_1 + d}_{a_2}, \underbrace{a_1 + 2d}_{a_3}, \underbrace{a_1 + 3d}_{a_4}, \dots$$

در نتیجه:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ است.

بنابراین: (مهم)

دنباله‌ی حسابی همان دنباله‌ی خطی (درجه اول) بوده و بعلاوه، در آن، ضریب n برابر قدرنسبت است.

نمونه:

در دنباله‌ی حسابی $a_n = -3n + 2$ داریم: $d = -3$.

توجه کنید:

(۱) بدیهی است که، دنباله‌ی حسابی با شرط $d > 0$ صعودی و با شرط $d < 0$ نزولی است. (در حالت خاص $d = 0$ ،

جملات دنباله یکسان، و بنابراین دنباله هم صعودی و هم نزولی است. مانند: $3, 3, 3, 3, \dots$)

(۲) طبق گفته‌های بالا، شکل بازگشتی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_{n+1} = a_n + d$ با معلوم بودن a_1 است.

نمونه‌ی دیگر:

در دنباله‌ی حسابی $4, 7, 10, \dots$ داریم: $a_1 = 4$ و $d = 3$. در نتیجه جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$a_n = 4 + (n-1)(3) = 3n + 1 \quad (a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 4 \text{ شکل بازگشتی})$$

تیپ سوالات

مجموع جملات سوم و هفتم در یک دنباله‌ی حسابی ۱۰ و جمله‌ی دهم $12/5$ است. جمله‌ی هفدهم کدام است؟

۲۳ ④

۲۳/۵ ③

۲۴/۵ ②

۲۵ ①

گزینه ۴

باید داشته باشیم: $a + 2d + a + 6d = 1$ و $a + 9d = 12/5$. با کم کردن طرفین معادلات داریم:

$$5d = 7/5 \rightarrow d = 1/5 \xrightarrow{a+4(1/5)=5} a = 5 - 4 = 1$$

بنابراین:

$$a_{17} = a + 16d = -1 + 16(1/5) = 23$$

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۹ و مجموع سه جمله بعدی آن برابر ۴۵ است. جمله ی چندم دنباله ۳۹۹ است؟

۱۰۲ ④

۱۰۱ ③

۱۰۰ ②

۹۹ ①

گزینه ۳

باید: $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ و $a_4 + a_5 + a_6 = 45$ باشد. یعنی:

$$a + a + d + a + 2d = 9, \quad a + 3d + a + 4d + a + 5d = 45 \rightarrow \begin{cases} 3a + 3d = 9 \\ 3a + 12d = 45 \end{cases}$$

با حل دستگاه $a = -1$ و $d = 4$ به دست می آیند. اکنون:

$$a_n = 399 \rightarrow a + (n-1)d = 399 \rightarrow -1 + 4(n-1) = 399$$

$$\rightarrow n-1 = \frac{399+1}{4} = 100 \Rightarrow n = 101$$

روش سریع:

وقتی جملات اول و آخر و قدرنسبت معلوم هستند، تعداد جملات یکبار از رابطه $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ حاصل می شود.

برای نمونه، در تست قبل بعد از تعیین $a = -1$ و $d = 4$:

$$n = \frac{399 - (-1)}{4} + 1 = \frac{400}{4} + 1 = 101$$

دنباله ی حسابی ...، ۲۹، ۳۳، ۳۷ فقط یازده جمله ی منفی دارد. جمله ی آخر دنباله کدام است؟

-۴۳ ④

-۴۷ ③

-۵۳ ②

-۵۷ ①

گزینه ۴

جمله ی عمومی دنباله به صورت $-4n + 41$ نوشته می شود. شرط منفی بودن جملات:

$$-4n + 41 < 0 \rightarrow 4n > 41 \rightarrow n > \frac{41}{4} = 10.25 \Rightarrow n \geq 11$$

پس اولین جمله ی منفی a_{11} و در نتیجه آخری a_{37} بوده است. جمله ی آخر:

$$a_{37} = a + (37-1)d = 37 + 36(-4) = -143$$

❓ جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جمله‌ی دهم الگوی خطی باشد، جمله‌ی پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنباله‌ی حسابی است؟ (نوبت ۱- تجربی ۱۴۰۲)

۳ ④

۴ ③

 $\frac{8}{5}$ ② $\frac{6}{5}$ ①

گزینه ۳

دنباله‌ی حسابی را به صورت $a_n = a + (n-1)d$ و دنباله‌ی خطی را به صورت $bn + c$ در نظر گرفته و چون جمله‌ی دهم آن صفر است: $b + c = 0$ یا $b = -c$ در نتیجه $c = -10b$ و دنباله‌ی خطی به صورت $b(n-10)$ نوشته می‌شود. طبق شرایط:

$$\left. \begin{array}{l} a + 3d = -8b \\ a + 7d = -3b \end{array} \right\} \xrightarrow{-} 4d = 5b \Rightarrow b = \frac{4d}{5}$$

نسبت مورد نظر:

$$\frac{(15-10)b}{d} = \frac{5 \times \frac{4}{5}d}{d} = 4$$

--- ❖ ---

❓ در یک دنباله‌ی حسابی با جمله اول a و قدرنسبت d ، تساوی $6a_7^2 = 5a_3a + 3a_4a$ برقرار است. نسبت جمله‌ی چهارم دنباله به d کدام می‌تواند باشد؟ (نوبت ۲- تجربی ۱۴۰۲)

۴ ④

 $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ②

۱ ①

گزینه ۱

تساوی را بر حسب a و d نوشته و ساده می‌کنیم:

$$6(a+d)^2 = \underbrace{5(a+2d)a}_{5a^2+10ad} + \underbrace{3(a+d)a}_{3a^2+3ad} \rightarrow 6a^2 + 12ad + 6d^2 = 8a^2 + 13ad$$

$$\rightarrow 2a^2 + ad - 6d^2 = 0 \xrightarrow{\div d^2} 2\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{a}{d} - 6 = 0 \xrightarrow{\frac{a}{d}=t} 2t^2 + t - 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=49} t = -2, \frac{3}{2} \xrightarrow{\frac{a}{d}=-2, \frac{3}{2}} a = -2d, \quad a = \frac{3}{2}d$$

دو حالت جواب:

$$\frac{a+3d}{d} = \frac{-2d+3d}{d} = \frac{d}{d} = 1, \quad \frac{a+3d}{d} = \frac{\frac{3}{2}d+3d}{d} = \frac{\frac{9}{2}d}{d} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

--- ❖ ---

توجه کنید:

در حل تست نسبتاً دشوار قبل، چون در مسأله برای d شرطی وجود ندارد، می‌توانستید با فرض $d=1$ به سؤال پاسخ سریع‌تر بدهید!

ایستگاه ۲: برقی فواصل

(۱) خاصیت جملات متوالی:

هرگاه a, b, c سه جمله‌ی متوالی (پشت سر هم) از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b = a+c$$

(عدد b را «واسطه حسابی» یا «میانگین حسابی» بین a و c گویند.) **دلیل:**

$$d = b - a = c - b \rightarrow b + b = a + c \Rightarrow 2b = a + c$$

توجه: معمولاً در نظر گرفتن جملات متوالی دنباله‌ی حسابی به صورت $a, a+d, a+2d, \dots$ سرعت بخش است.

(۲) اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله عددی معلوم باشند، آنگاه:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} \quad (\text{یا: } (a_n - a_m) = (n - m)d)$$

نتیجه‌ی مهم:

وقتی بین اعداد a و b تعداد n واسطه حسابی قرار می‌دهید، در واقع $a = a_1$ و $a_{n+2} = b$ بوده و بنابراین:

$$d = \frac{a_{n+2} - a_1}{(n+2) - 1} = \frac{a_{n+2} - a_1}{n+1} \Rightarrow \boxed{d = \frac{b - a}{n+1}}$$

(۳) اگر $m + n = r + s$ ، آنگاه در دنباله‌ی عددی رابطه‌ی $a_m + a_n = a_r + a_s$ برقرار است. بویژه، اگر

$2m = r + s$ باشد، آنگاه نتیجه می‌گیریم:

$$2a_m = a_r + a_s$$

چند نمونه:

الف) در هر دنباله‌ی حسابی $a_8 + a_{11} = a_6 + a_{13}$ است و همچنین: $2a_9 = a_8 + a_{10}$.

ب) قدر نسبت دنباله‌ی عددی با جملات متوالی $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99$ را مشخص می‌کنیم. طبق نکته‌ی قبل باید:

$$2(3p+4) = 2p+3+5p-1 \rightarrow 6p+8 = 7p+2 \Rightarrow p=6$$

با جایگذاری، جملات به صورت $15, 22, 29$ بوده‌اند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$d = 22 - 15 = 7$$

پ) بین دو عدد -17 و 308 ، چهار عدد (واسطه حسابی) قرار می‌دهیم تا کل شش عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند.

دنباله باید چنین باشد: $-17, \quad , \quad , \quad , \quad , 308$

طبق روش بالا: $d = \frac{308 - (-17)}{4+1} = \frac{325}{5} = 65$ بوده و بنابراین کافی است هر جمله با 65 جمع شود تا جمله‌ی بعدی

نوشته شود:

$$-17, 48, 113, 178, 243, 308$$

تپ سؤالات

در یک دنباله حسابی، جملات یازدهم و شانزدهم به ترتیب 31 و 46 هستند. جمله‌ی هشتم کدام است؟

۲۶ ④

۲۸ ③

۲۴ ②

۲۲ ①

گزینه ۱

ابتدا قدر نسبت را تعیین می‌کنیم:

$$d = \frac{a_{16} - a_{11}}{16 - 11} = \frac{46 - 31}{5} = 3$$

اکنون چون $a_{11} = 31$ است، جمله‌ی اول معلوم می‌شود: $a = 1 \Rightarrow a + 10 \times 3 = 31$ ، بنابراین:

$$a_8 = a + 7d \Rightarrow a_8 = 1 + 7 \times 3 = 22$$

--- ❖ ---

❖ اگر $a + 2$ ، 11 و $a - 4$ به ترتیب جملات چهارم، هفتم و نهم یک الگوی خطی باشند، چند جمله از این الگو مثبت است؟

(ریاضی ۱۴۰۵)

۱۱ ④

۱۰ ③

۹ ②

۸ ①

گزینه ۲

در دنباله حسابی باید داشته باشیم:

$$a - 4 - 11 = (9 - 7)d \rightarrow a - 15 = 2d \quad \text{و} \quad 11 - (3a + 2) = (7 - 4)d \rightarrow 9 - 3a = 3d$$

معادله سمت چپ ضرب در ۳، علاوه معادله سمت راست: $d = -4$ و سپس: $a = 7$ حاصل می‌شود. تعیین جمله اول دنباله:

$$a + 6d = 11 \Rightarrow a = 11 - 6(-4) = 35 \quad (\text{این‌جا جمله اول دنباله حسابی است}).$$

پس دنباله به صورت: $a_n = 35 + (n - 1)(-4) = 39 - 4n$ بوده بنابراین:

$$39 - 4n > 0 \rightarrow n < \frac{39}{4} = 9.75 \Rightarrow n = 1, 2, \dots, 9$$

--- ❖ ---

❖ اگر واسطه‌ی حسابی بین ۱۰ و ۴ را x و واسطه‌ی حسابی بین ۳۳ و ۲۱ را y بنامیم و عددهای x, b, a, c, y از چپبه راست تشکیل یک دنباله‌ی حسابی دهند، $b^2 + c$ کدام است؟

۳۰۱ ④

۱۶۱ ③

۱۶۶ ②

۳۱۱ ①

گزینه ۲

می‌دانیم باید:

$$x = \frac{4 + 10}{2} = 7 \quad \text{و} \quad y = \frac{21 + 33}{2} = 27$$

پس ۲۷، $a, c, 7$ یک دنباله‌ی حسابی است و در نتیجه:

$$d = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{27 - 7}{4} = 5 \Rightarrow (b = 12, a = 17, c = 22)$$

از آنجا $b^2 + c = 144 + 22 = 166$ خواهد بود.

--- ❖ ---

❖ در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی پانزدهم برابر ۱۲ است و داریم: $a_{10}^2 - a_1^2 = 36$. جمله‌ی دهم این دنباله کدام است؟

۱۰ ④

۱/۵ ③

۴/۵ ②

-۹ ①

گزینه ۲

با استفاده از نکته‌ی قبل:

$$360 = a_{20}^2 - a_{10}^2 = \underbrace{(a_{20} - a_{10})}_{(20-10)d} \underbrace{(a_{20} + a_{10})}_{2a_{15}} \rightarrow 10d \times 2(12) = 360 \Rightarrow d = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

اکنون جمله‌ی اول و سپس جمله‌ی دهم قابل محاسبه است:

$$a_{15} = a + 14d \rightarrow a = 12 - 14\left(\frac{3}{2}\right) = -9 \Rightarrow a_{10} = a + 9d = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} = \frac{9}{2}$$

---  ---

 بین دو عدد ۲۲ و m ، چهار واسطه‌ی حسابی قرار داده‌ایم. اگر مجموع آن‌ها ۵۸ باشد، بزرگ‌ترین آن‌ها کدام است؟

۱۷ 

۱۹ 

۲۰ 

۲۸ 

 گزینه ۳

وضعیّت گفته شده چنین است:

$$m, m+d, m+2d, m+3d, m+4d, 22$$

واضح است که $22 = m + 5d$ و جمع چهار واسطه $4m + 10d = 58$ است:

$$\begin{cases} 4m + 10d = 58 \\ m + 5d = 22 \end{cases} \xrightarrow{(-4) \times} \begin{cases} 4m + 10d = 58 \\ -4m - 20d = -88 \end{cases} \xrightarrow{+} -10d = -30 \Rightarrow d = 3$$

بزرگ‌ترین واسطه، جمله‌ی قبل از ۲۲ است:

$$22 - 3 = 19$$

---  ---

 بین دو عدد $4a-3$ و $7a$ چهار واسطه حسابی درج کرده‌ایم. اگر اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین واسطه برابر $14/4$ باشد،

a کدام است؟ (جمله‌ی اول: $4a-3$)

۵ 

۶ 

۹ 

۷ 

 گزینه ۲

با تصور جمله‌ها: $4a-3, \dots, 7a$

قدرنسبت برابر $d = \frac{7a - (4a-3)}{4+1} = \frac{3a+3}{5}$ است. کوچک‌ترین واسطه، جمله‌ی دوم $4a-3 + \frac{3a+3}{5}$ و بزرگ‌ترین واسطه،

جمله‌ی پنجم $7a - \frac{3a+3}{5}$ بوده و بنابراین:

$$\underbrace{7a - \frac{3a+3}{5} - (4a-3 + \frac{3a+3}{5})}_{3a+3-2 \times \frac{3a+3}{5}} = 14/4 \xrightarrow{\times 5} 15a + 15 - 6a - 6 = 72 \Rightarrow a = 9$$

---  ---

 در یک دنباله‌ی حسابی داریم:

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17 \quad \text{و} \quad a_4 + a_5 + \dots + a_{14} = 77$$

اگر $a_m = 13$ باشد، m کدام است؟

۱۶ 

۱۸ 

۲۰ 

۲۲ 

گزینه ۳

طبق آن چه گفته شد، می‌نویسیم:

$$a_4 + a_7 + a_{10} = a_7 + \underbrace{a_4 + a_{10}}_{2a_7} = 3a_7 = 17 \Rightarrow a_7 = \frac{17}{3}$$

در مورد جملات a_4 و a_{14} داریم: $a_4 + a_{14} = 2a_9$. (این خاصیت در مورد سایر جفت جملات در جمع داده شده هم برقرار است. در نتیجه:

$$a_4 + a_5 + \dots + a_{14} = \underbrace{a_4 + a_{14}}_{2a_9} + \underbrace{a_5 + a_{13}}_{2a_9} + \underbrace{a_6 + a_{12}}_{2a_9} + \underbrace{a_7 + a_{11}}_{2a_9} + \underbrace{a_8 + a_{10}}_{2a_9} + a_9$$

$$= 11a_9 = 77 \Rightarrow a_9 = 7$$

در نتیجه: $d = \frac{a_9 - a_7}{9 - 7} = \frac{7 - \frac{17}{3}}{2} = \frac{\frac{21 - 17}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}$ است و از آنجا $a_1 = \frac{5}{3}$ خواهد شد. اکنون:

$$a_m = 13 \rightarrow \frac{5}{3} + (m-1) \times \frac{2}{3} = 13 \xrightarrow{\times 3} m-1 = \frac{39-5}{2} = 17 \Rightarrow m = 18$$

---◇---

تمرین تست (۴)

۱- در دنباله‌ای حسابی با $a_{10} - a_4 = 24$ ، مقدار $a_{19} - a_5$ چقدر است؟

- ① -304 ② -302 ③ -298 ④ -296

۲- اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جمله‌ی شانزدهم کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- ① $11/6$ ② $9/6$ ③ $2/4$ ④ $1/4$

۳- جمله‌ی نهم دنباله‌ی اعداد $\frac{5}{2}, \frac{8}{5}, \frac{11}{10}, \frac{14}{17}, \dots$ کدام است؟

- ① $\frac{28}{65}$ ② $\frac{29}{65}$ ③ $\frac{29}{82}$ ④ $\frac{31}{82}$

۴- اگر $a_n = (3a-b)n^2 + (a+7)n + b$ جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۵ باشد، جمله‌ی چندم دنباله ۲۹ است؟

- ① هشتم ② هفتم ③ ششم ④ پنجم

۵- سه جمله‌ی اول دنباله‌ای حسابی $3a+1$ ، $5a-11$ ، $2a-3$ هستند. جمله‌ی چندم این دنباله برابر با ۲۰۱۷ است؟

- ① 502 ② 503 ③ 504 ④ 505

۶- عددهای ۲۳، c ، ۱۹، b ، a جمله‌های متوالی دنباله‌ای حسابی‌اند. حاصل عبارت $18b - 4a - 14c$ چقدر است؟

- ① -32 ② -48 ③ 22 ④ 28

۷- در یک دنباله حسابی $a_5 + a_8 = 16$ و $a_3 + a_6 = -160$ است. قدر نسبت دنباله کدام است؟

- ① ۲ ② -۲ ③ -۵ ④ ۵

۸- بین دو عدد $x = m^2 + 3m + 4$ و $y = m^2 + 4$ ، تعداد $m-1$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد حاصل، یک دنباله حسابی تشکیل دهند. قدر نسبت دنباله حاصل کدام است؟ ($x > y$)

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۹- اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد؛ یعنی: $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$. در دسته‌ی نهم، واسطه‌ی حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟ (تجربی ۹۹)

- ① ۷۱ ② ۷۲ ③ ۷۳ ④ ۷۴

۱۰- اگر به قدر نسبت یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی پنجم دنباله‌ی حاصل چند واحد اضافه می‌شود؟

- ① صفر ② ۲ ③ ۸ ④ ۱۰

۱۱- در یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۳- داریم: $a_6^2 + a_8^2 + 8 = a_7^2 + a_9^2 - 7$. مجموع چهار جمله‌ی دوم دنباله کدام است؟

- ① -۵ ② $-\frac{15}{4}$ ③ $\frac{15}{4}$ ④ ۵

۱۲- در یک دنباله‌ی عددی که دارای ۱۷ جمله است، جمله‌ی نهم برابر ۸ است. مجموع جملات این دنباله چقدر است؟

- ① ۱۳۶ ② ۱۲۸ ③ ۱۲۰ ④ ۱۵۳

۱۳- در یک دنباله‌ی حسابی، جمله‌ی اول از جمله‌ی آخر ۲۴ واحد بزرگ‌تر بوده و جمله‌ی وسط ۱۸- است. اگر قدرنسبت دنباله $-\frac{1}{4}$ باشد، جمله‌ی آخر آن کدام است؟

- ① -۳۰ ② -۲۴ ③ -۱۲ ④ -۶

نوع دوم دنباله‌های خاص:

ایستگاه ۱: دنباله هندسی

در دنباله‌ای مانند: $\dots, ۸, -۴, ۲, -۱$ که به آن «هندسی» گفته می‌شود؛

$$\frac{۲}{-۱} = \frac{-۴}{۲} = \frac{۸}{-۴} = \dots$$

نسبت هر دو جمله متوالی، یک مقدار ثابت به نام قدرنسبت (r) است.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = r \quad \text{قدرنسبت:}$$

پس: $a_2 = a_1 \times r$ و $a_3 = a_2 \times r$... است؛ یعنی:هر جمله در r ضرب شده تا جمله بعد حاصل گردد.برای نمونه؛ دنباله‌ی $\dots, ۱, -۳, ۹$ هندسی است و:

$$r = \frac{-۳}{۱} = -۳ \quad (\text{هر جمله در } -۳ \text{ ضرب شده و جمله بعد حاصل شده است.})$$

در کل، اگر a جمله اول و r قدرنسبت باشد، دنباله چنین است:

$$\underbrace{a}_{a_1}, \underbrace{a \times r}_{a_2}, \underbrace{a \times r^2}_{a_3}, \underbrace{a \times r^3}_{a_4}, \dots$$

بنابراین:

جمله عمومی دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n = a \times r^{n-1}$ است.

توجه کنید:

طبق گفته‌های بالا، شکل بازگشتی دنباله‌ی هندسی به صورت $a_{n+1} = a_n \times r$ و با معلوم بودن a_1 است.

نمونه‌ی دیگر:

دنباله‌ی $\dots, \sqrt{۶}, ۲\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۶}$ هندسی است، زیرا نسبت جملات یکسان است:

$$\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۶}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}, \quad \frac{\sqrt{۶}}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۶}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}} r = \frac{\sqrt{2}}{۲}$$

پس جمله عمومی به صورت $a_n = ۲\sqrt{۶} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{۲}\right)^{n-1}$ خواهد بود.

تیب سوالات

در دنباله‌ی بازگشتی: $a_1 = -۲$ و $a_n = ۳a_{n-1}$ برای $n \geq ۲$ ، اختلاف جملات سوم و پنجم آن کدام است؟

۱۶ ④

۳۴ ③

۷۲ ②

۱۴۴ ①

گزینه ۱

طبق $a_n = 3a_{n-1}$ ، دنباله هندسی با قدرنسبت $r = 3$ است. جملات مورد نظر:

$$a_3 = ar^2 = -2(3)^2 = -18 \quad \text{و} \quad a_5 = ar^4 = -2(3)^4 = -162$$

اختلاف جملات:

$$-18 - (-162) = 144$$

--- ---

در یک دنباله هندسی $a_1 a_4 a_7 = 27$ است. مقدار $a_2 a_5 a_8$ کدام است؟

۱۸ ④

۹ ③

۴/۵ ②

۳ ①

گزینه ۳

طبق تساوی داده شده:

$$\underbrace{ar \times ar^4 \times ar^9}_{a^3 r^{14}} = 27 \rightarrow (ar^6)^3 = 27 \Rightarrow ar^6 = 3$$

مقدار مورد نظر:

$$\underbrace{ar^4 \times ar^8}_{a^2 r^{12}} = (ar^6)^2 = 3^2 = 9$$

--- ---

به یک کارگر پیشنهاد داده شده دستمزد ساعت اول کار ۱۰۰۰ تومان باشد و هر ساعت ۲۰ درصد به دستمزد او اضافه شود. دستمزد کارگر در ساعت پنجم کدام است؟

۱۹۸۶/۳ ④

۲۰۱۶/۴ ③

۲۰۷۳/۶ ②

۲۱۰۴/۸ ①

گزینه ۲

اگر قرار دهیم: $a_1 = 1000$ ، در این صورت:

$$a_2 = 1000 + \frac{20}{100} \times 1000 = 1000(1 + 0.2) \Rightarrow a_2 = 1.2a_1$$

است؛ یعنی دنباله هندسی با $r = 1.2$ است. تعیین جمله پنجم:

$$a_5 = ar^4 = 1000(1.2)^4 = 1000 \times 2.0736 = 2073.6$$

--- ---

اگر جمله اول یک دنباله هندسی را دو برابر و قدرنسبت آن را نصف کنیم، جمله چهارم چند برابر می شود؟

۸ ④

 $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ②

۴ ①

گزینه ۲

در دنباله جدید، جمله اول $2a$ و قدرنسبت $\frac{r}{p}$ است. نسبت جمله چهارم جدید به قبل:

$$\frac{2a\left(\frac{r}{p}\right)^3}{ar^3} = \frac{2a \times \frac{r^3}{p^3}}{ar^3} = \frac{2r^3}{p^3} = \frac{2}{p^3}$$

--- ---

❓ دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل پنج جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ باشند؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۴ 4

۴ 3

۳ 2

۷ 1

گزینه ۱

دنباله‌های مورد نظر به صورت a, ar, ar^2, ar^3, ar^4 هستند. با قدرنسبت‌های طبیعی $r > 1$ ، تعداد حالات را تعیین می‌کنیم:

$$r = 2 : a, 2a, 4a, 8a, 16a \rightarrow 16a \leq 100 \rightarrow a \leq \frac{100}{16} \cong 6/2 \Rightarrow a = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (\text{شش جواب})$$

$$r = 3 : a, 3a, 9a, 27a, 81a \rightarrow 81a \leq 100 \rightarrow a \leq \frac{100}{81} \cong 1/2 \Rightarrow a = 1 \quad (\text{یک جواب})$$

پس در کل $6 + 1 = 7$ حالت قابل قبول است.

❓ جمله‌ی چندم دنباله‌ی $\frac{2}{3}, \frac{6}{12}, \frac{2}{48}, \frac{6}{192}, \dots$ برابر $\frac{1}{128 \times 1024}$ است؟

4 نهم

3 دهم

2 یازدهم

1 دوازدهم

گزینه ۳

مخرج‌ها جملات هندسی به صورت $3 \times 4^{n-1} = 3 \times 2^{2n-2}$ هستند. بر حسب صورت، باید دو حالت بررسی شود:

$$1) \frac{2}{3 \times 2^{2n-2}} = \frac{1}{2^7 \times 2^{10}} \rightarrow \frac{1}{3 \times 2^{2n-3}} = \frac{1}{2^7 \times 2^{10}}$$

این حالت غیرممکن است، زیرا در مخرج سمت راست، عامل ۳ وجود ندارد.

$$2) \frac{6}{3 \times 2^{2n-2}} = \frac{1}{2^7 \times 2^{10}} \rightarrow \frac{1}{2^{2n-3}} = \frac{1}{2^7 \times 2^{10}} \rightarrow 2^{2n-3} = 2^{7+10} = 2^{17}$$

$$\rightarrow 2n - 3 = 17 \Rightarrow n = 10$$

ایستگاه ۲: برقی فواصل

۱) اگر عددهای a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه:

$$b = \pm \sqrt{ac} \quad \text{یا} \quad b^2 = ac$$

عدد b را «میانگین یا واسطه هندسی» بین a و c گوئیم. (باید a و c هم‌علامت باشند!) دلیل:

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \pm \sqrt{ac}$$

توجه: نمایش مناسب جملات متوالی در دنباله‌ی هندسی: $\frac{a}{r}, a, ar$

۲) اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

نتیجه:

وقتی بخواهیم بین دو عدد a و b تعداد n واسطه‌ی هندسی درج کنیم: ($a_1 = a$ و $a_{n+1} = b$)

قدرنسبت از رابطه‌ی $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ محاسبه می‌شود.

۳) اگر $m + n = r + s$ ، آنگاه در هر دنباله‌ی هندسی رابطه‌ی $a_m \times a_n = a_r \times a_s$ برقرار است.

بویژه:

اگر $2m = r + s$ ، آنگاه نتیجه می‌گیریم:

$$(a_m)^2 = a_r \times a_s$$

چند نمونه:

الف) اگر جملات دوم و هشتم دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۸ و ۲ باشند:

$$r^{8-2} = \frac{a_8}{a_2} = \frac{2}{8} \rightarrow r^6 = \frac{1}{4} \Rightarrow r = \pm \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{6}} = \pm \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\rightarrow r = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \pm \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

ب) در درج ۹ عدد مثبت بین عددهای ۳ و ۳۰۷۲ برای تشکیل دنباله‌ی هندسی:

$$r^{9+1} = \frac{3072}{3} \rightarrow r^{10} = 1024 = 2^{10} \Rightarrow r = 2$$

سپس جملات را می‌توان توسط r نوشت.

(روش عادی: $a_1 = 3$ و $a_{11} = 3072$ ، سپس تعیین r توسط تقسیم)

تیب سوالات

❓ اگر $x+1$ ، $x-1$ ، $2x+1$ و x به ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنباله هندسی باشند، حاصل ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۳)

۴ -۲

۳ ۲

۲ ۱

۱ -۱

گزینه ؟ ☒

با توجه به قدرنسبت، باید $\frac{a_5}{a_4} = \frac{a_8}{a_7} = r$ باشد. با جایگذاری و حل معادله، مقادیر $x = 1 \pm \sqrt{2}$ حاصل خواهد شد. دو مقدار ممکن

قدرنسبت $\frac{x-1}{x+1}$ را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}+1} \times \frac{1-\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \times \frac{-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{-2}{4-2} = -1$$

توجه کنید:

این سؤال مشکل ساختاری دارد؛ زیرا با مقداری که حاصل کرده‌ایم، دنباله‌ی هندسی با جملات گفته شده تشکیل نمی‌شود؛ برای

نمونه، رابطه $r^2 = \frac{a_7}{a_5}$ برقرار نمی‌شود!

---◇---

❓ جمله ی چهارم دنباله ی هندسی $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{5}, \dots$ کدام است؟

④ $\sqrt[9]{5}$

③ $\sqrt[12]{5}$

② $\sqrt[3]{25}$

① $\sqrt[5]{25}$

گزینه ۲ ✓

چون $\sqrt{5}$ بین جمله ی چهارم و $\sqrt[3]{5}$ قرار دارد، طبق نکته ی قبل:

$$(\sqrt{5})^2 = \sqrt[3]{5} \times a_4 \rightarrow a_4 = \frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

---◇---

❓ اگر واسطه ی حسابی ۱۱ و -۵ برابر x و واسطه ی هندسی ۳ و y برابر ۱۲ باشد به طوری که x, a, b, c, y دنباله ی هندسی باشد، مقدار b کدام است؟

④ -۱۲

③ ± 24

② ± 12

① ۱۲

گزینه ۲ ✓

باید داشته باشیم:

$$2x = -5 + 11 \Rightarrow x = 3 \quad \text{و} \quad 12^2 = 3 \times y \Rightarrow y = \frac{144}{3} = 48$$

به دلیل فاصله ی یکسان x و y از b باید b واسطه ی هندسی بین آن دو باشد:

$$b^2 = x \times y = 3 \times 48 = 144 \Rightarrow b = \pm \sqrt{144} = \pm 12$$

---◇---

❓ با ضرب سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله ی حسابی حاصل می شود. اگر مجموع مربعات سه جمله ی هندسی برابر مجموع جملات حسابی باشد، جمله ی اول هندسی کدام است؟ (نوبت ۱- ریاضی ۱۴۰۲)

④ $\frac{48}{5}$

③ $\frac{24}{5}$

② $\frac{64}{7}$

① $\frac{32}{7}$

گزینه ۲ ✓

اگر دنباله ی هندسی a, ar, ar^2 باشد، دنباله ی $\frac{a}{r}, \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r^3}$ حسابی است. پس:

$$2\left(\frac{a}{r}\right) = \frac{\frac{a}{r^2}}{\frac{a}{r^3}} + \frac{\frac{a}{r^3}}{\frac{a}{r^4}} \xrightarrow[\times r]{\div \frac{a}{r^2}} 4r = 1 + 4r^2 \rightarrow (2r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

پس $\frac{a}{2}, a, 2a$ هندسی و $\frac{a}{4}, \frac{a}{2}, a$ حسابی بوده اند. طبق شرط دوم:

$$4a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} = 3 \times \frac{a}{2} \xrightarrow[\div a]{\times 4} 16a + 4a + a = 96 \rightarrow a = \frac{96}{21} = \frac{32}{7}$$

در نتیجه جواب $2a = \frac{64}{7}$ است.

---◇---

بین دو عدد مثبت a و b ، هفت واسطه‌ی هندسی قرار داده و یک دنباله‌ی صعودی ساخته‌ایم. اگر دومین و ششمین واسطه به ترتیب ۲ و ۳۲ باشند، جمله‌ی پنجم دنباله کدام است؟

۴ ④

۸ ③

۱۶ ②

۲ ①

گزینه ۳

جملات به صورت روبه‌رو هستند: $a, ۲, \dots, ۳۲, b$

قدرنسبت توسط دو جمله‌ی معلوم تعیین می‌شود: $r = ۲ \xrightarrow{r > 0}$ $\frac{a_۷}{a_۳} = \frac{۳۲}{۴} = ۱۶ \xrightarrow{r > 0} r = ۲$ (اکنون توسط جمله‌ی سوم و قدرنسبت، جمله‌ی پنجم نوشته می‌شود:

$$a_۳ = ۴ \xrightarrow{\times ۲} a_۴ = ۸ \xrightarrow{\times ۲} a_۵ = ۱۶$$

ایستگاه ۳: نکات پایانی

۱) دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت r :

الف) حالت $a > 0$:

▪ اگر $r > 1$ باشد، دنباله صعودی است. مانند $۱, ۳, ۹, \dots$

▪ اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله نزولی است. مانند $۹, ۳, ۱, \dots$

ب) حالت $a < 0$:

▪ اگر $r > 1$ باشد، دنباله نزولی است. مانند $-۱, -۳, -۹, \dots$

▪ اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله صعودی است. مانند $-۹, -۳, -۱, \dots$

پ) در حالتی که r منفی باشد، بدون توجه به مقدار a ، جملات دنباله یک در میان مثبت و منفی هستند؛ مانند:

$$۲, -۴, ۸, -۱۶, \dots$$

در این حالت، دنباله‌ی هندسی صعودی یا نزولی نیست. (دنباله «نوسانی» است.)

(توجه: در سؤالات، معمولاً فقط با حالت الف روبه‌رو می‌شویم.)

۲) قدرنسبت r در دنباله‌ی هندسی نمی‌تواند صفر شود.

حالت خاص $r = 1$ فقط وقتی رخ می‌دهد که همه‌ی جملات دنباله برابر باشند. (دنباله‌ی ثابت)

دنباله‌ی ثابت، تنها دنباله‌ای است که هم حسابی (با: $d = 0$) و هم هندسی (با: $r = 1$) است.

حالت ویژه:

دنباله‌ی ثابت: $۰, ۰, ۰, \dots$ حسابی با $a = d = 0$ است، ولی هندسی محسوب نمی‌شود؛ چون نسبت جملات در آن بی‌معنی است.

تیب سوالات

کدام یک از دنباله‌های اعداد حقیقی زیر، همواره تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهد؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۴)

- ① $a, a^2, a^3, \dots$ ② $a, 1, \frac{1}{a}, \dots$ ③ $a^2, a, 1, \dots$ ④ $1, a, a^2, \dots$

گزینه ۲

اگر $a = 0$ باشد، گزینه‌های سوم و چهارم دنباله‌ی هندسی نخواهند بود و؛
گزینه‌ی اول دنباله‌ی ثابت صفر شده و پانزهم هندسی نیست.

ولی طبق صورت سؤال:

جملات دنباله‌ها عدد حقیقی هستند، یعنی در گزینه دوم $a \neq 0$ بوده تا $\frac{1}{a}$ عدد شود. پس $1, a, \frac{1}{a}, \dots$ هندسی است!



در یک دنباله‌ی هندسی نزولی، مجموع جملات پنجم و ششم برابر ۲ و تفاضل جملات پنجم و هفتم برابر ۱ است. جمله‌ی هفتم کدام است؟

- ① $\frac{1}{7}$ ② 7 ③ 3 ④ $\frac{1}{3}$

گزینه ۴

چون جملات در حال کاهش بوده، باید $a_5 - a_6 = 1$ باشد. (توجه کنید؛ مقدار $a_6 - a_5$ عددی منفی است.) پس داریم:

$$a_5 - a_6 = ar^4 - ar^5 = 1 \quad \text{و} \quad a_5 + a_6 = ar^4 + ar^5 = 2$$

$$\rightarrow ar^4(1 - r) = 1, \quad ar^4(1 + r) = 2$$

تقسیم دو طرف تساوی‌ها بر هم:

$$\frac{ar^4(1 - r)}{ar^4(1 + r)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{(1 - r)}{(1 + r)} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{(1 - r)(1 + r)}{(1 + r)} = \frac{1}{2} \rightarrow 1 - r = \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 - 2r = 1$$

پس $r = \frac{1}{2}$ است. جایگذاری در معادله‌ی $ar^4(1 - r) = 1$:

$$a \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \rightarrow a \times \frac{3}{64} = 1 \rightarrow a = \frac{64}{3} \Rightarrow a_6 = ar^5 = \frac{64}{3} \times \frac{1}{64} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{3}$$



در چند مورد زیر، دنباله‌ی هندسی معرفی شده الزاماً افزایشی (صعودی) است؟

الف) $a_3 = 16$ و $a_6 = 256$ ب) $a_3 = -3$ و $r = \frac{1}{5}$

پ) $a_3 a_6 = 10$ و $a_4 a_5 = 160$ و $a_7 a_8 = 128$ ت) $a_4 a_5 = 64$

- ① ۳ ② ۲ ③ ۱ ④ ۰

گزینه ۲

پدرسی هر یک از موارد:

الف) چون $r^4 = \frac{256}{16} = 16$ است، اگر r را منفی بپذیریم، دنباله یک در میان مثبت و منفی و در نتیجه صعودی نیست.

(ب) صعودی است، کافی است چند جمله را بنویسید:

$$\dots, -3, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{25}, \dots$$

(پ) از تساوی اول: $a^2 r^3 = 10$ و در نتیجه r مثبت است، چون:

$$\frac{a_4 a_5}{a_1 a_3} = \frac{a^2 r^7}{a^2 r^3} = \frac{160}{10} \rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = 2$$

اکنون از $ar^5 = 128$ داریم: $a = 4$ و دنباله صعودی است.

(ت) از تساوی داده شده $a^2 r^7 = 64$ است، می‌تواند a منفی و r مثبت باشد (مثلاً $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $r = 2$) و دنباله صعودی نباشد.

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}, \dots$$

سؤالات ترکیبی:

نمونه‌هایی دیگر از سؤالاتی که به صورت ترکیب دنباله‌های حسابی و هندسی طرح می‌شوند.

❖ سه عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. از جمله‌ی اول ۱، از جمله‌ی دوم ۲ و از جمله‌ی سوم عدد ۳ را کم می‌کنیم. اگر

اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی کدام است؟

۴ $2\sqrt{2}$

۳ ۲

۲ ۱

۱ $\sqrt{2}$

✅ گزینه ۲

توجه کنید که بهترین انتخاب برای سه عدد مجهول که دنباله حسابی باشند، $a-d, a, a+d$ بوده که قدر نسبت همان d است. طبق فرض $a-d-1, a-2, a+d-3$ دنباله هندسی است، لذا:

$$(a-2)^2 = (a-d-1)(a+d-3) \rightarrow a^2 - 4a + 4 = a^2 + ad - 3a - ad - d^2 + 3d - a - d + 3$$

با ساده کردن معادله، خواهیم داشت: $d^2 - 2d + 1 = 0$ که حل آن $d = 1$ را نتیجه خواهد داد.

--- ❖ ---

❖ تفاضل واسطه‌های حسابی و هندسی دو عدد a و b برابر صفر شده است. حاصل عبارت $\frac{a^2 - 3ab}{b^2 + 3ab}$ کدام است؟

۴ $-\frac{2}{3}$

۳ $-\frac{1}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ $\frac{2}{3}$

✅ گزینه ۳

باید داشته باشیم:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = 0 \rightarrow a+b-2\sqrt{ab} = 0 \rightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 0 \rightarrow \sqrt{a}-\sqrt{b} = 0$$

پس $a = b$ بوده است. جایگزینی:

$$\frac{a^2 - 3ab}{b^2 + 3ab} = \frac{a^2 - 3aa}{a^2 + 3aa} = \frac{a^2 - 3a^2}{a^2 + 3a^2} = \frac{-2a^2}{4a^2} = -\frac{1}{2}$$

--- ❖ ---

❓ اگر a, b, c سه جمله نخست و متمایز یک دنباله حسابی بوده و $b, \frac{1}{p}a, \frac{1}{q}c$ سه جمله نخست یک دنباله هندسی باشند، دو

برابر قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟ (نوبت ۲- تجربی ۱۴۰۴)

۱-۲

۳-۱

۲-۲

۴-۱

گزینه ۱

طبق شرایط گفته شده $a, 2b = a + c$ ، $a^2 = bc$ $\Rightarrow \left(\frac{a}{p}\right)^2 = b \times \frac{c}{q}$ و مقدار خواسته شده $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ است.

با استفاده از رابطه $c = 2b - a$ می‌توان نوشت:

$$\xrightarrow{a^2=bc} a^2 = b(2b - a) \rightarrow a^2 + ab - 2b^2 = 0 \xrightarrow{\div b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} - 2 = 0$$

اگر قرار دهیم: $\frac{a}{b} = t$ ، معادله خاص $t^2 + t - 2 = 0$ را با جواب‌های $t = 1$ و $t = -2$ خواهیم داشت. به ازای $t = 1$ ، داریم $a = b$ که طبق فرض ممکن نیست و در نتیجه:

$$\frac{a}{b} = t = -2$$

تمرین تست (۵)

۱- در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جمله ی پنجم ۴۸ و حاصل ضرب جملات دوم و چهارم برابر ۱۴۴ است. جمله ی هشتم دنباله کدام است؟

۴۲۴ ۴

۳۸۴ ۳

۳۴۴ ۲

۱۹۶ ۱

۲- در یک دنباله هندسی، اگر مجموع جمله‌های دوم، سوم و چهارم برابر با ۳ و مجموع جمله‌های پنجم، ششم و هفتم برابر با ۲۴۳ باشد، جمله ی شانزدهم چند برابر جمله ی هفتم است؟

۳۲۷ ۴

۳۱۲ ۳

۳۹ ۲

۳۷ ۱

۳- حاصل ضرب سه جمله ی متوالی یک دنباله ی هندسی برابر ۸ و جمع آن‌ها برابر $\frac{62}{5}$ است. عدد کوچک‌تر کدام است؟

۲ ۴

۱ ۳

$\frac{2}{5}$ ۲

$\frac{1}{5}$ ۱

۴- در یک دنباله هندسی، جمله سوم جذر جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از $\frac{1}{p}$ کمتر است؟

(نوبت ۲- تجربی ۱۴۰۳)

$\frac{1}{6}$ ۴

$\frac{1}{3}$ ۳

$\frac{3}{2}$ ۲

$\frac{5}{2}$ ۱

۵- نرخ رشد تولید سالانه ی کارخانه‌ای که امسال شروع به فعالیت کرده، برابر با ۲ درصد است و در پایان سال جاری تولید کارخانه x واحد کالا خواهد بود. در پایان سال هشتم، تولید کارخانه چند واحد است؟

$(1/0.2)^8 x$ ۴

$(1/0.2)^7 x$ ۳

$(0/0.2)^8 x$ ۲

$(0/0.2)^7 x$ ۱

۶- دنباله هندسی $\frac{1}{8}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \dots$ چند جمله‌ی کمتر از ۴ دارد؟

- ① ۴ ② ۵ ③ ۱۰ ④ ۱۱

۷- در یک دنباله هندسی با جمله‌ی اول ۷، به همه‌ی جملات عدد ۳ را اضافه می‌کنیم و دنباله‌ی جدید همچنان هندسی است. مجموع صد جمله‌ی اول کدام است؟

- ① ۱۰۰۰ ② 7^{5050} ③ ۷۰۰ ④ ۹۹۳

۸- اعداد 2^a و $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله متوالی در یک دنباله هندسی‌اند. واسطه حسابی بین a و b کدام است؟

- ① $2/5$ ② ۲ ③ $1/5$ ④ $\sqrt{2}$

۹- اگر a, b, c, d به ترتیب از چپ به راست جملات غیر منفی و متوالی یک دنباله هندسی باشند و رابطه‌ی:

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = 32$$

برقرار باشد، مقدار $|a-d|$ کدام است؟

- ① ۲ ② $2\sqrt{2}$ ③ ۸ ④ $4\sqrt{2}$

۱۰- بین دو عدد $\sqrt{2}$ و ۸ - تعداد چهار واسطه هندسی قرار می‌دهیم. جمله‌ی سوم دنباله کدام است؟

- ① -۴ ② $-4\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ ۴

۱۱- چند مورد نادرست است؟

- با جمع یا ضرب جملات دنباله‌ی حسابی در یک عدد، دنباله‌ای حسابی با همان قدرنسبت حاصل می‌شود.
- اگر تمام جملات دنباله‌ی هندسی به توان ۲ برسند، یک دنباله‌ی هندسی حاصل می‌شود.
- اگر تمام جملات دنباله‌ی حسابی به توان ۲ برسند، یک دنباله‌ی حسابی یا هندسی حاصل می‌شود.
- دنباله‌ای وجود دارد که هم حسابی و هم هندسی باشد.

- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

۱۲- در یک دنباله حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند. چندمین جمله‌ی این دنباله‌ی حسابی صفر است؟

- ① ۹ ② ۱۰ ③ ۱۱ ④ ۱۲

۱۳- در دنباله‌ی حسابی a_n ، اگر عدد c را به جملات چهارم، ششم و دهم اضافه کنیم، به ترتیب جملات سوم، چهارم و پنجم یک دنباله هندسی حاصل می‌شود. کدام مورد درست است؟

- ① $a+d=c$ ② $a-d=c$ ③ $a+d=-c$ ④ $a-d=-c$

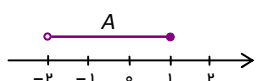
۱۴- سه عدد تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. از جمله‌ی اول ۱، از جمله‌ی دوم ۲ و از جمله‌ی سوم عدد ۳ را کم می‌کنیم. اگر اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند، قدر نسبت دنباله‌ی حسابی کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② ۱ ③ ۲ ④ $2\sqrt{2}$

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برقی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری درصد ۱۰۰ در آزمون‌ها»

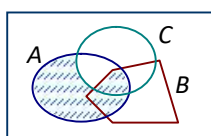
ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید...



اگر $C = [-1, 2]$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq 3 - 2x < 5\}$ داشته باشیم:

بخش رنگی شکل مقابل برابر کدام مجموعه است؟



- ② $(-2, 1]$
④ $(-2, 1] - \{-1\}$

- ① $(-2, -1]$
③ $(-2, -1)$

گزینه ۴

واضح است که $A = (-2, 1]$ و $B = (-1, 1]$ خواهد شد. با قدری دقت، قسمت رنگی را می‌توان چنین نوشت:

$$(A - C) \cup (A \cap B)$$

در نتیجه جواب:

$$\underbrace{(A - C)}_{(-2, -1)} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{(-1, 1]} = (-2, 1] - \{-1\}$$

--- ◆ ---

اگر a و b اعدادی طبیعی باشند که $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = (-\infty, 5] \cup [a - 3, +\infty)$ و علاوه، بازه‌ی $[4, \frac{b+3}{2}]$ شامل چهار عدد

طبیعی باشد، بیشترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۲۰ ④

۲۵ ③

۲۱ ②

۲۳ ①

گزینه ۲

اجتماع دو بازه برابر کل $\mathbb{R}$ شده، پس باید: $a - 3 \leq 5 \Rightarrow a \leq 8$.

برای این که بازه‌ی $[4, \frac{b+3}{2}]$ شامل چهار عدد طبیعی (و بیشترین) باشد، لازم است به صورت $(4, 8]$ در نظر گرفته شود.

پس:

$$\frac{b+3}{2} = 8 \rightarrow b = 13 \Rightarrow \max(a+b) = 8 + 13 = 21$$

--- ◆ ---

دو بازه‌ی $A = (-\infty, \frac{m}{3})$ و $B = (1 - \frac{m}{3}, m^2 - 2)$ مفروض‌اند. اگر $A \cap B$ شامل تنها یک عدد صحیح باشد، در B

حداکثر چند عدد صحیح وجود دارد؟

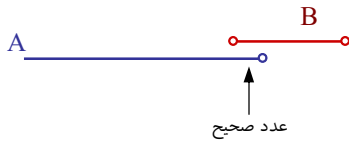
۱۱ ④

۱۰ ③

۸ ②

۷ ①

گزینه ۱



باید وضعیت کلی بازه‌ها به صورت مقابل باشد:
بنابراین لازم است:

$$1 - \frac{m}{2} < \frac{m}{3} \xrightarrow{\times 6} 6 - 3m < 2m \rightarrow m > \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

چون هر قدر m بزرگ‌تر شود، عددهای صحیح بیشتری در B قرار می‌گیرد، مقادیر پیشتر از $1\frac{1}{5}$ را تا جای لازم بررسی می‌کنیم.

(الف) تا $m = \sqrt{2}$ $m = 2$ بازه B تشکیل نمی‌شود؛ بعد از آن حتی اگر $m = 2$ باشد، $B = (0, 2)$ و $A \cap B$ عضو صحیح ندارد.

(ب) اگر $m > 2$ شود، $0 \in A \cap B$ خواهد بود.

(پ) باید هر دو شرط $1 - \frac{m}{2} \geq -1$ و $\frac{m}{3} \leq 1$ برقرار باشند تا عددهای -1 و 1 در $A \cap B$ قرار نگیرند:

$$\frac{m}{3} \leq 1 \Rightarrow m \leq 3 \quad \text{و} \quad 1 - \frac{m}{2} \geq -1 \Rightarrow m \leq 4$$

پس حداکثر m برابر ۳ است؛ $B = (-\frac{1}{2}, 3)$ و جواب ۷ خواهد بود.

اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$ و $B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$ باشند، متمم

مجموعه‌ی $U - (A \cup B)$ چند عضو دارد؟

۴۱ ④

۴۷ ③

۵۳ ②

۵۹ ①

گزینه ۲

طبق رابطه‌های $(A')' = A$ و $U - A = A'$ که گفته‌ایم:

$$U - (A \cup B)' = ((A \cup B)')' = A \cup B$$

اکنون توجه کنید که:

$$A \cap B = \{15, 30, 45, \dots, 90\}$$

پس: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{100}{5} + \frac{99}{3} - \frac{90}{15} = 47$

$$100 - 47 = 53$$

اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ مرجع، A مجموعه مضرب‌های ۵ و B مجموعه مضرب‌های ۳ باشد، کدام نادرست است؟

$$n(A \cup B) = 47 \quad ②$$

$$n(A \cap B) = 6 \quad ①$$

$$n(A \cap B') = 16 \quad ④$$

$$n(A' \cap B') = 53 \quad ③$$

گزینه ۴

چون $A = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$ و $B = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$ است، در نتیجه:

$$n(A \cap B) = \frac{90}{15} = 6$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = \frac{100}{5} + \frac{99}{3} - \frac{90}{15} = 47$$

$$n(A' \cap B') = n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B) = 100 - 47 = 53$$

$$n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = \frac{100}{5} - \frac{90}{15} = 14$$

--- ❖ ---

❖ اگر $n(B') = 2n(A) + n(A' \cap B')$ باشد، کدام مورد صحیح است؟

④ $A \cap B \neq \emptyset$

③ $A = B = \emptyset$

② $B = \emptyset$

① $A = \emptyset$

گزینه ۱ ✓

با استفاده از $A' \cap B' = (A \cup B)'$ تساوی را ساده می‌کنیم:

$$n(B') = 2n(A) + n((A \cup B)') \rightarrow n(U) - n(B) = 2n(A) + n(U) - n(A \cup B)$$

$$\rightarrow -n(B) = 2n(A) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$$

$$\rightarrow n(A) + n(A \cap B) = 0$$

چون مقادیر نامنفی هستند، باید هر دو صفر شوند و لذا:

$$n(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$$

--- ❖ ---

ایستگاه ۱: فواید از متمم

♦ رابطه‌ی $A \subseteq B$ با رابطه‌ی زیر معادل است:

$$B' \subseteq A'$$

♦ برای دو مجموعه، شرط $A \cap B = \emptyset$ با دو وضعیت زیر معادل است:

$$B \subseteq A' \quad \text{و} \quad A \subseteq B'$$

♦ دو حالت خیلی خاص زیر ممکن است مورد نیاز شوند:

چون همیشه A و A' از هم جدا هستند، روابط $A \subseteq A'$ یا $A' \subseteq A$ فقط وقتی برقرار هستند که مجموعه‌ی سمت چپ تهی باشد. پس:

$$A \subseteq A' \Rightarrow A = \emptyset, A' = U \quad \text{و} \quad A' \subseteq A \Rightarrow A' = \emptyset, A = U$$

(درستی دو مورد اول را در نمودار ون نشان دهید!)

تیب سوالات

❖ A مجموعه‌ای ناتهی و متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی تحت شرط $(A' \cup B) \subseteq B$ هستند. کدام مجموعه الزاماً متناهی

است؟

④ $A' - B$

③ $A' \cup B$

② $B - A$

① B'

گزینه ۱ ✓

از رابطه‌ی $(A' \cup B) \subseteq B$ واضح است که باید $A' \subseteq B$ باشد. به صورت معادل $B' \subseteq A$ بوده و چون A متناهی است، B' نیز باید متناهی باشد.

--- ❖ ---

❓ اگر $A \subseteq B'$ باشد، ساده شده‌ی عبارت $B' - (A - B)'$ برابر کدام مجموعه است؟

A' ④

B' ③

B ②

A ①

گزینه ۱ ✓

طبق فرض $A \subseteq B'$ باید $A \cap B = \emptyset$ باشد و بنابراین: $A - B = A$. عبارت داده شده:
 $B' - (A - B)' = B' - A' = A - B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} = A$
 ---❓---

❓ برای مجموعه‌های A و B می‌دانیم $A \cap B' \subseteq A' \cup B$ کدام همواره درست است؟

B ⊆ A ④

B = ∅ ③

A ⊆ B ②

A = U ①

گزینه ۲ ✓

عبارت داده شده را می‌توان چنین نوشت:

$$A \cap B' \subseteq (A \cap B')'$$

چنان‌که گفته‌ایم باید $A \cap B'$ تهی باشد. بنابراین:

$$A \cap B' = \emptyset \rightarrow A - B = \emptyset \rightarrow A \subseteq B$$

---❓---

در سؤالات دشوار، دو تکنیک زیر، تشخیص روابط بین مجموعه‌ها را به یک کار نسبتاً ساده تبدیل می‌کنند.

ایستگاه ۲: تکنیک‌های عددی

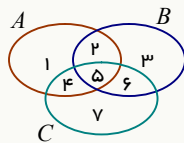
تکنیک ۱:

گاهی در عبارت سؤال و گزینه‌ها، نماد متمم (پریم) وجود ندارد.

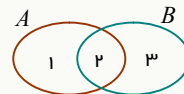
در این حالت چنین عمل می‌کنیم:

■ بر حسب تعداد مجموعه‌های موجود در سؤال، یکی از شکل‌های زیر را رسم کرده و نواحی مختلف را به

دلخواه شماره‌گذاری می‌کنیم:



وقتی با سه مجموعه مواجه هستیم



وقتی با دو مجموعه مواجه هستیم

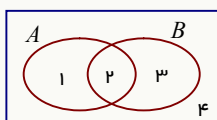
■ اکنون کافی است عبارت در تست را بر حسب شماره‌ها محاسبه کرده و با گزینه‌ها مقایسه کنیم.

تکنیک ۲:

گاهی در عبارت سؤال و یا در گزینه‌ها، نماد متمم (پریم) هم دیده می‌شود.

تنها تفاوت نسبت به تکنیک (۱) در این است که باید مجموعه‌ی مرجع را هم رسم

کرده و ناحیه‌ی خارج مجموعه‌ها را هم شماره‌گذاری کنیم. شکل مربوطه:



تیب سوالات

اگر A و B دو مجموعه باشند، حاصل $(A \cup B) - B$ کدام است؟

$A - B$ ④

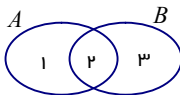
$A \cap B$ ③

B ②

A ①

گزینه ④ ✓

شکلی با دو مجموعه در نظر گرفته و نواحی را شماره گذاری می‌کنیم:
اکنون عبارت داده شده را پر حسب شماره‌ها می‌نویسیم:



$$(A \cup B) - B = \{1, 2, 3\} - \{2, 3\} = 1$$

واضح است که فقط عبارت موجود در گزینه‌ی چهار با جواب بالا یکسان است:

$$A - B = \{1, 2\} - \{2, 3\} = 1$$

--- ④ ---

اگر $A \cup B' = U$ باشد، آنگاه کدام نادرست است؟

$A' \cap B = \emptyset$ ④

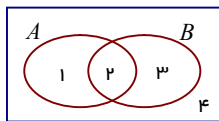
$A \cap B' = \emptyset$ ③

$B \subseteq A$ ②

$A' \subseteq B'$ ①

گزینه ③ ✓

شکل مربوطه را رسم کرده و تساوی داده شده را بررسی می‌کنیم:



$$A \cup B' = 1, 2 \cup 1, 4 = 1, 2, 4 \xrightarrow{A \cup B' = U} 1, 2, 4 = 1, 2, 3, 4$$

تساوی $1, 2, 4 = 1, 2, 3, 4$ به این معنی است که ناحیه‌ی شماره‌ی ۳ وجود نداشته و در نتیجه B فقط به صورت $\{2\}$ است (یعنی: $B \subseteq A$). در این صورت در گزینه ۳ خواهیم داشت:

$$A \cap B' = \{1, 2\} \cap \{2\}' = \{1, 2\} \cap \{1, 4\} = \{1\} \neq \emptyset$$

پس عبارت این گزینه نادرست است؛ درستی عبارت‌های سایر گزینه‌ها به آسانی بررسی می‌شود.

--- ③ ---

ساده شده‌ی عبارت $(A' \cap B) \cup [(B \cap A) - B'] \cap (B \cup A)$ کدام است؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۴)

A ④

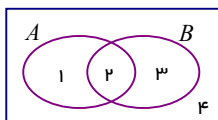
B ③

$B - A$ ②

$A - B$ ①

گزینه ③ ✓

عبارت را قدری ساده‌تر نوشته و تکنیک عددی را به کار می‌بریم:



$$\underbrace{(B - A)}_3 \cup \underbrace{[(\underbrace{B \cap A}_{= A \cap B = \{2\}}) - \underbrace{B'}_{1, 2, 3}]]}_{2} \cap \underbrace{(B \cup A)}_{1, 2, 3} = \{3, 2\}$$

که همان B است. (البته روش جبری پاسخ این تست هم نسبتاً ساده است!)

--- ③ ---

چند تست قوی از الگو و دنباله‌ها:

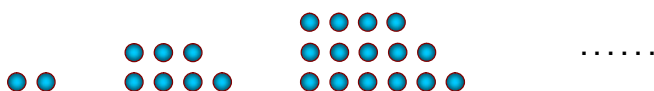
به یاد داشته باشید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دو نتیجه‌ی زیر هم از آن وجود دارد:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2 \quad \text{و} \quad 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

در الگوی مقابل، تعداد نقطه‌ها در شکل دهم کدام است؟



۱۳۰ ①

۱۳۵ ②

۱۵۵ ③

۱۵۰ ④

گزینه ۳

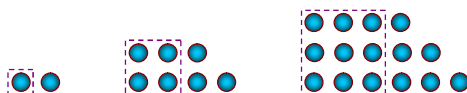
روش اول:

تعداد در شکل اول: ۲، در شکل دوم: ۳ + ۴ و در شکل سوم: ۴ + ۵ + ۶ است. پس تعداد در شکل دهم $11 + 12 + \dots + 20$ است. محاسبه هوشمندانه با تبدیل به فرمول بالا:

$$11 + 12 + \dots + 20 = (1 + 2 + \dots + 20) - (1 + 2 + \dots + 10) = \frac{20 \times 21}{2} - \frac{10 \times 11}{2} = 210 - 55 = 155$$

روش دوم:

شکل‌ها ترکیبی از دنباله‌های مربعی و مثلثی هستند:



طبق روابط مربوطه:

$$10^2 + \frac{10 \times 11}{2} = 100 + 55 = 155$$

--- ③ ---

در دنباله‌ی مقابل، حاصل ضرب دو جمله‌ی متوالی ۲۴۶ است.

مجموع این دو جمله کدام است؟

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & n \text{ مضرب ۳ باشد} \\ \frac{n}{3} & n \text{ مضرب ۳ نباشد} \end{cases}$$

④ $\frac{105}{3}$

③ $\frac{111}{3}$

② $\frac{109}{3}$

① $\frac{107}{3}$

گزینه ۲

توجه کنید:

جملات دنباله به صورت: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \sqrt{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \sqrt{6}, \dots$ هستند. دو جمله‌ی متوالی مورد نظر نمی‌توانند هر دو از ضابطه‌ی دوم باشند، چون

کسرها ساده نمی‌شوند و حاصل ضرب غیر صحیح خواهد شد. پس لازم است جملات مربوط به دو ضابطه (یکی به صورت $\sqrt{n}$ و دیگری به

صورت $\frac{n}{3}$) بوده و پویژه در $\sqrt{n}$ عدد n مضرب ۳ و مجذور کامل باشد: $n = 9, 36, 81, \dots$

آزمون مقادیر:

با عددی که ضریبشان حدود ۲۴۶ را بدهد! برای $n = 36$ دو حالت قابل بررسی است:

$$a_{36} \times a_{36} = \frac{36}{3} \times \sqrt{36} \neq 246 \quad \text{و} \quad a_{36} \times a_{37} = \sqrt{36} \times \frac{37}{3} \neq 246$$

مقدار بعدی $n = 81$:

$$a_{\lambda_0} \times a_{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{3} \times \sqrt{\lambda_1} = 240 \neq 246 \quad \text{و} \quad a_{\lambda_1} \times a_{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1} \times \frac{\lambda_2}{3} = 246$$

پس آن دو جمله ۹ و $\frac{\lambda_2}{3}$ بوده و جمعشان $\frac{\lambda_2}{3} + 9 = \frac{27 + \lambda_2}{3} = \frac{109}{3}$ است.

--- ❖ ---

❖ در الگوی درجه دوم $r_n = an^2 + bn + c$ ، دومین جمله برابر ۵ و اولین جمله، نصف جمله سوم است. اگر a و b عددهایی صحیح و $|b| < 10$ باشد، جمله پنجم کدام می‌تواند باشد؟

۵ ④

۱۵ ③

-۱۰ ②

-۲۰ ①

گزینه ۲ ✓

باید داشته باشیم:

$$r_1 = 5 \rightarrow 4a + 2b + c = 5 \Rightarrow c = -4a - 2b + 5$$

$$r_3 = 2r_1 \rightarrow 9a + 3b + c = 2(a + b + c) \Rightarrow c = 7a + b$$

از برابر قرار دادن c در دو عبارت بالا: $7a + b = -4a - 2b + 5$ و در نتیجه: $11a = 5 - 3b$ خواهد شد. طبق شرط داده شده، $10 > b > -10$ باید صحیح: ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ باشد. با بررسی مقادیر، فقط برای $b = 9$ و $b = -2$ از عبارت $11a = 5 - 3b$ برای a نیز مقدار صحیح حاصل می‌شود. بررسی هر دو حالت:

$$b = -2 : a = 1 \xrightarrow{c=7a+b} c = 5 \rightarrow r_n = n^2 - 2n + 5 \xrightarrow{n=5} r_5 = 20$$

$$b = 9 : a = -2 \xrightarrow{c=7a+b} c = -5 \rightarrow r_n = -2n^2 + 9n - 5 \xrightarrow{n=5} r_5 = -10$$

--- ❖ ---

❖ اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر شماره‌ی آن دسته باشد:

... , (7, 9, 11) , (3, 5) , (1)

مجموع دو جمله اول و آخر دسته‌ی سی‌ام کدام است؟

۱۸۵۰ ④

۱۸۰۰ ③

۱۷۵۰ ②

۱۷۰۰ ①

گزینه ۳ ✓

با بررسی ساده‌ای می‌توان فهمید که:

$$b_n = n(n+1) - 1 \quad \text{عدد آخر دسته‌ی } n \text{ ام} \quad \text{و} \quad a_n = n(n-1) + 1 \quad \text{عدد اول دسته‌ی } n \text{ ام}$$

پنجاهین:

$$a_{50} + b_{50} = 30 \times 29 + 1 + 30 \times 31 - 1 = 30 \times (29 + 31) = 1800$$

--- ❖ ---

❖ جملات یک دنباله‌ی حسابی با ترتیب زیر دسته‌بندی شده است:

... , (-3, 1), (5, 9, 13, 17), (21, 25, 29, 33, 37, 41),

جمله سوم از دسته پنزدهم کدام است؟

۸۴۱ ④

۸۴۵ ③

۷۹۱ ②

۷۹۵ ①

گزینه ۳ ✓

تعداد جملات تا آخر دسته‌ی چهاردهم برابر است با:

$$2 + 4 + 6 + \dots + \frac{2 \times 14}{2 \times 14} = 14(14 + 1) = 210$$

پس جمله ی a_{13} از دنباله ی حسابی خواسته شده است:

$$a + 212d = -3 + 212 \times 4 = 845$$

---◇---

◇ گزینه ۴: a^2 ، $4a$ و $6a - 1$ جملات متوالی یک دنباله ی حسابی هستند. اگر جمله ی اول این دنباله برابر $3 - 2a$ و جمله ی نهم برابر

$$a^2 + 2a - b$$

باشد، مقدار b کدام است؟ ($a > 0$)

۱۰ ④

۹ ③

۸ ②

۷ ①

گزینه ۴ ✓

از رابطه ی $6a - 1 + a^2 = 2(4a)$ با توجه به شرط $a > 0$ ، مقدار $a = \sqrt{2} + 1$ حاصل شده و سپس خواهیم داشت:

$$d = 6a - 1 - 4a = 2a - 1 = 2\sqrt{2} + 1$$

ضمناً با دو پارچایگذاری $2a + 1$ جای a^2 ، تساوی $a^2 = 12a + 5$ به دست می آید. اکنون با توجه به جمله ی نهم:

$$\underbrace{a^2}_{12a+5} + 2a - b = 3 - 2a + 8(2\sqrt{2} + 1) \rightarrow b = \underbrace{16a}_{16(\sqrt{2}+1)} + 2 - 8(2\sqrt{2} + 1) = 10$$

---◇---

◇ دنباله ی هندسی $(\frac{1}{5})^{k^2-1}, \dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{125}, \dots$ چند جمله دارد؟ (k زوج است).

۳۵ ④

 $\frac{k}{2}$ ③ $\frac{k^2}{2}$ ②

۳۵ ①

گزینه ۲ ✓

قدر نسبت برابر است با: $r = \frac{\frac{1}{125}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}$ و در نتیجه با استفاده از جمله ی n ام می نویسیم:

$$a_n = (\frac{1}{5})^{k^2-1} \rightarrow \frac{1}{5} \times \underbrace{(\frac{1}{25})^{n-1}}_{=(\frac{1}{5})^{2n-2}} = (\frac{1}{5})^{k^2-1} \rightarrow (\frac{1}{5})^{2n-1} = (\frac{1}{5})^{k^2-1}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$2n - 1 = k^2 - 1 \Rightarrow n = \frac{k^2}{2}$$

---◇---

◇ بین دو عدد ۱۱ و ۵۷، تعداد ۱۱۱ جمله درج شده تا یک دنباله ی حسابی حاصل شود. جمله ی وسط کدام است؟

۶۸ ④

۲۳ ③

۳۴ ②

۴۶ ①

گزینه ۲ ✓

چون جمله ی وسط فاصله ی یکسان از عدد اول و آخر دارد، بنابراین:

$$57 + 11 = 2x \Rightarrow x = \frac{68}{2} = 34$$

---  ---

یک تیپ خاص:

جملات مشترک دو دنباله حسابی (با قدرنسبت‌های d_1 و d_2)، خود دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. جمله‌ی اول با مقایسه جملات دو دنباله معلوم می‌شود و قدرنسبت برابر $[d_1, d_2]$ (ک.م.م) است.

 در دنباله‌های حسابی $3, 7, 11, \dots$ و $a_n = -5 + 6n$ ، اگر دنباله‌ی جملات مشترک را b_n بگیریم، حاصل $b_5 + b_1$ برابر کدام است؟

۱۸۰ ④

۱۷۰ ③

۱۶۰ ②

۱۵۰ ①

 گزینه ۳

به آسانی جمله‌ی اول مشترک ۷ مشخص می‌شود. چون $d = [4, 6] = 12$ است، بنابراین:

$$b_n = 7 + (n-1)(12) = 12n - 5 \Rightarrow b_5 + b_1 = 55 + 115 = 170$$

---  ---

ایستگاه ۳: خاصیت دنباله درجه ۲

اگر در الگوی $t_n = an^2 + bn + c$ ، حاصل $t_{n+1} - t_n$ را ساده کنید، یک عبارت درجه اول حاصل خواهد شد. بنابراین:

اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی درجه دوم: $(t_2 - t_1), (t_3 - t_2), \dots$ یک دنباله‌ی حسابی است.

بعلاوه:

به آسانی می‌توان دید که قدرنسبت دنباله حسابی برابر $2a$ (ضریب n^2 در فرمول t_n) است.

تیپ سؤالات

 جمله‌ی دهم الگوی خطی $1, 3, \dots$ با جمله‌ی چندم الگوی درجه دوم $14, 11, 10, \dots$ برابر است؟

۶ ④

۷ ③

۸ ②

۹ ①

 گزینه ۲

جمله‌ی دهم الگوی خطی: $1 + 9(4) = 37$ است. اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی درجه دوم:

$$11 - 14, 10 - 11, \dots \rightarrow -3, -1, 1, 3, 5, \dots$$

اکنون با شروع از ۱۴ و جمع جملات بالا به ترتیب با آن، جملات دنباله‌ی درجه دوم به آسانی نوشته می‌شوند:

$$\underbrace{14 - 3}_{11}, \underbrace{11 - 1}_{10}, \underbrace{10 + 1}_{11}, \underbrace{11 + 3}_{14}, \underbrace{14 + 5}_{19}, \underbrace{19 + 7}_{26}, \underbrace{26 + 9}_{35}$$

---  ---

❓ جملات اول و سوم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب جملات چهارم و هفتم دنباله‌ی درجه دوم $7, 10, 15, \dots$ هستند. جمله‌ی هفتم دنباله‌ی حسابی کدام است؟

119 ④

99 ③

144 ②

121 ①

گزینه ۱

اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی درجه دوم $3, 5, \dots$ است، چون این دنباله حسابی است، باید جملات بعدی به صورت $7, 9, 11, 13, \dots$ باشند. کافی است این عددها به جملات درجه دوم اضافه شوند:

$$7, 10, 15, \underbrace{22}_{t_4}, \underbrace{31}_{t_5}, \underbrace{42}_{t_6}, \underbrace{55}_{t_7}, \dots \Rightarrow$$

پس دنباله‌ی حسابی مورد نظر به صورت: $7, 9, 11, 13, \dots$ ، $\underbrace{22}_a$ ، $\underbrace{55}_{a_6}$ بوده، در نتیجه $d = \frac{55-22}{3-1} = \frac{33}{2}$ و خواهیم داشت:

$$a_7 = a + 6d = 22 + 6 \times \frac{33}{2} = 22 + 99 = 121$$

---❓---

❓ اگر $a+4, b, c-4, \dots$ دنباله‌ای هندسی و جمله‌ی دهم دنباله‌ی درجه دوم $a, a+b, a+b+c, \dots$ برابر 207 باشد، مقدار a کدام است؟

12 ④

7 ③

11 ②

9 ①

گزینه ۳

اختلاف جملات متوالی دنباله‌ی درجه دوم: $a, b, c, \dots$ (دنباله‌ای حسابی) خواهد شد. پس دنباله‌ی $a+4, b, c-4, \dots$ حسابی نیز هست (چرا؟) می‌دانیم فقط دنباله‌ی ثابت می‌تواند حسابی و هندسی باشد. پس:

$$a+4 = b = c-4$$

چایگذاری در دنباله‌ی اختلاف متوالی جملات: $a, a+4, a+8, \dots$. قدرنسبت این دنباله 4 و در نتیجه ضریب n^2 در دنباله‌ی درجه

دوم برابر $\frac{4}{2} = 2$ است؛ دنباله‌ای به صورت $r_n = 2n^2 + dn + e$ با اطلاعات $r_1 = 0$ و $r_0 = 207$ چایگذاری:

$$(2+d+e=0 \quad \text{و} \quad 200+10d+e=207) \rightarrow d=1, e=-3$$

بنابراین: $r_n = 2n^2 + n - 3$ و در نتیجه $a = r_0 = 7$ است.

---❓---

ایستگاه ۴: تغییر جملات

برخی تغییرات جملات: (دنباله مسابی)

با جمع یا تفریق یک عدد با تمام جملات دنباله‌ی حسابی، قدرنسبت تغییر نمی‌کند؛ ولی اگر جملات در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، قدرنسبت نیز همان تغییر را خواهد داشت.

بعلاوه:

با سایر تغییرات مانند توان رسانی جملات و ... معمولاً دنباله از شکل حسابی خارج خواهد شد.

برخی تغییرات جملات: (دنباله هندسی)

اگر تمام جملات دنباله هندسی در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، قدرنسبت تغییر نمی‌کند؛ ولی اگر جملات را به توان یک عدد برسانیم، قدرنسبت نیز به همان توان خواهد رسید.
بعلاوه:
 با سایر تغییرات مانند جمع یا تفریق جملات با یک عدد و ... معمولاً دنباله از شکل هندسی خارج خواهد شد.

برای نمونه:

۱) در دنباله حسابی $a, b, c, \dots$ با قدرنسبت d :

الف) دنباله $a+2, b+2, c+2, \dots$ حسابی با همان قدرنسبت d است.

ب) دنباله $\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}, \dots$ حسابی با قدرنسبت $\frac{d}{p}$ است.

پ) دنباله‌های $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ و $a^3, b^3, c^3, \dots$ هیچ کدام حسابی نیستند. (مگر در حالت خاص برابر بودن جملات)

۲) دنباله هندسی $a, b, c, \dots$ با قدرنسبت $r \neq 1$ را در نظر بگیرید.

الف) دنباله $\frac{a}{p}, \frac{b}{p}, \frac{c}{p}, \dots$ هندسی با همان قدرنسبت r است، دنباله $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \dots$ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{r}$ است و

دنباله $a^3, b^3, c^3, \dots$ هندسی با قدرنسبت r^3 است.

ب) دنباله $a+1, b+1, c+1, \dots$ هندسی نیست. (مگر در حالت خاص برابر بودن جملات)

توجه کنید: (مهم)

در هر سؤال مربوط به دو نکته‌ی قبل، می‌توانید یک مثال ساده بزنید و با اعمال تغییرات گفته شده، خواص دنباله‌ی جدید را تشخیص دهید.

سؤال: اگر جملات دو دنباله حسابی با قدرنسبت‌های ۲ و ۳ را نظیر به نظیر جمع کنیم، چگونه دنباله‌ای و با چه ویژگی‌هایی خواهیم داشت؟

تیپ سؤالات

❓ در یک دنباله هندسی با جمله‌ی اول ۳، از هر جمله پنج واحد کم شده و حاصل باز هم دنباله‌ای هندسی است. مجموع صد جمله‌ی اول دنباله‌ی جدید کدام است؟

۵۰۰ ④

-۵۰۰ ③

-۳۰۰ ②

-۲۰۰ ①

گزینه ۱

به هر جمله عدد ثابت ۵- اضافه شده و دنباله هندسی باقی مانده؛ فقط در دنباله‌ی ثابت چنین چیزی ممکن است. پس جملات همگی برابر ۳ بوده‌اند. بعد از کم کردن عدد ۵ از هر جمله:

$-2, -2, -2, \dots$

مجموع صد جمله: $100 \times (-2) = -200$

--- ❓ ---

❓ اگر جملات یک دنباله هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

④ $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

② ۱

① ۰

گزینه ۲ ☒

با نصف کردن جملات، دنباله همچنان هندسی است و چون حسابی هم هست، باید تمام جملات برابر بوده باشند. پس:

$$d=0, r=1 \Rightarrow r+d=1$$

---❓---



ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱- حاصل عبارت $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 99^2 - 100^2$ کدام است؟

④ ۵۰۰۰

③ ۵۰۵۰

② ۴۵۵۰

① ۴۵۰۰

۲- در یک دنباله $a_1 = 1$ و همواره رابطه‌ی $a_{n+1} = a_n + 2$ برقرار است. مجموع n جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

④ $(2n+1)^2$

③ $(2n-1)^2$

② $2n^2$

① n^2

۳- در دنباله‌ای هندسی $a_1 a_2 \dots a_5 = 1$ و $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 5$ است. حاصل عبارت $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5}$ کدام است؟

④ ۵

③ ۲۵

② $\frac{5}{2}$

① ۱

۴- اگر $A = [2n-1, 3n-2]$ و $B = [-1, 2]$ دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، n چند مقدار طبیعی را نمی‌تواند اختیار کند؟

④ ۱

③ ۲

② ۳

① ۴

۵- مجموع دو عدد ۱۵۰ و واسطه‌ی هندسی آن دو ۲۱ است. عدد کوچک‌تر کدام است؟

④ ۳

③ ۳۳

② ۵۴

① ۱۰۸

۶- اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که عدد آخر هر دسته مضرب پنج باشد. عدد اول دسته پنجاهم کدام است؟

$$\{1, 3, 5\}, \{7, 9, 11, 13, 15\}, \{17, 19, 21, 23, 25\}, \dots$$

④ ۴۶۷

③ ۴۷۷

② ۴۹۷

① ۴۸۷

۷- زاویه‌های یک پنج‌ضلعی، دنباله‌ای حسابی تشکیل می‌دهند. اگر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی آن برابر با 28° باشد، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه کدام است؟

④ 68°

③ 108°

② 188°

① 148°

۸- درباره‌ی دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, \dots, a_k$ می‌دانیم:

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17 \quad \text{و} \quad a_4 + a_5 + \dots + a_{14} = 77$$

اگر $a_k = 13$ باشد، مقدار k کدام است؟

۲۲ ④

۲۰ ③

۱۸ ②

۱۶ ①

۹- در جملات دو دنباله‌ی حسابی $1, 1, 8, 5, \dots$ و $2, 6, 10, \dots$ تعدادی عدد دو رقمی مشترک وجود دارد. بزرگ‌ترین آن‌ها کدام است؟

۹۴ ④

۹۲ ③

۹۸ ②

۸۸ ①

۱۰- اگر $A_n = (-\frac{1}{n^2}, n^2)$ و داشته باشیم: $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n - \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = (-1, a] \cup [b, \infty)$ ، مقدار $b - a$ کدام است؟

$\frac{17}{4}$ ④

$\frac{13}{4}$ ③

$\frac{9}{4}$ ②

$\frac{3}{4}$ ①

۱۱- در یک مدرسه با ۵۰ دانش‌آموز، ۲۵ دانش‌آموز در مسابقات ورزشی و ۳۰ دانش‌آموز در مسابقات هنری شرکت کرده‌اند. حداکثر تعداد دانش‌آموزهایی که می‌توانند در هر دو مسابقه شرکت کرده باشند، چند برابر حداکثر تعداد دانش‌آموزهایی است که می‌توانند فقط در یک مسابقه شرکت کرده باشند؟

$\frac{9}{10}$ ④

$\frac{2}{3}$ ③

$\frac{5}{9}$ ②

$\frac{1}{10}$ ①

۱۲- اگر اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند و قدر نسبت بزرگ‌تر از یک باشد، قدر نسبت کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ④

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ③

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ ②

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ①

۱۳- اگر $(A - B) - C = \emptyset$ باشد، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$A \subseteq (B \cap C)$ ④

$A \subseteq C$ ③

$A \subseteq (B \cup C)$ ②

$A \subseteq B$ ①

۱۴- U مجموعه‌ی مرجع و $A - (B - C) = (A - B) - C$ است. ساده شده‌ی $B \cap (A \cap C)'$ کدام است؟

U ④

$A - C$ ③

B ②

$\emptyset$ ①

۱۵- فرض کنید $U = A \cup B$ مجموعه‌ی مرجع و $C = (A - B) \cup (B - A)$. اگر $((A' - B)' \cap C)' = B$ ، کدام عبارت درست است؟ (ریاضی ۱۴۰۰)

$A = B$ ④

$A \subseteq B$ ③

$A \cap B = \emptyset$ ②

$B \subseteq A$ ①