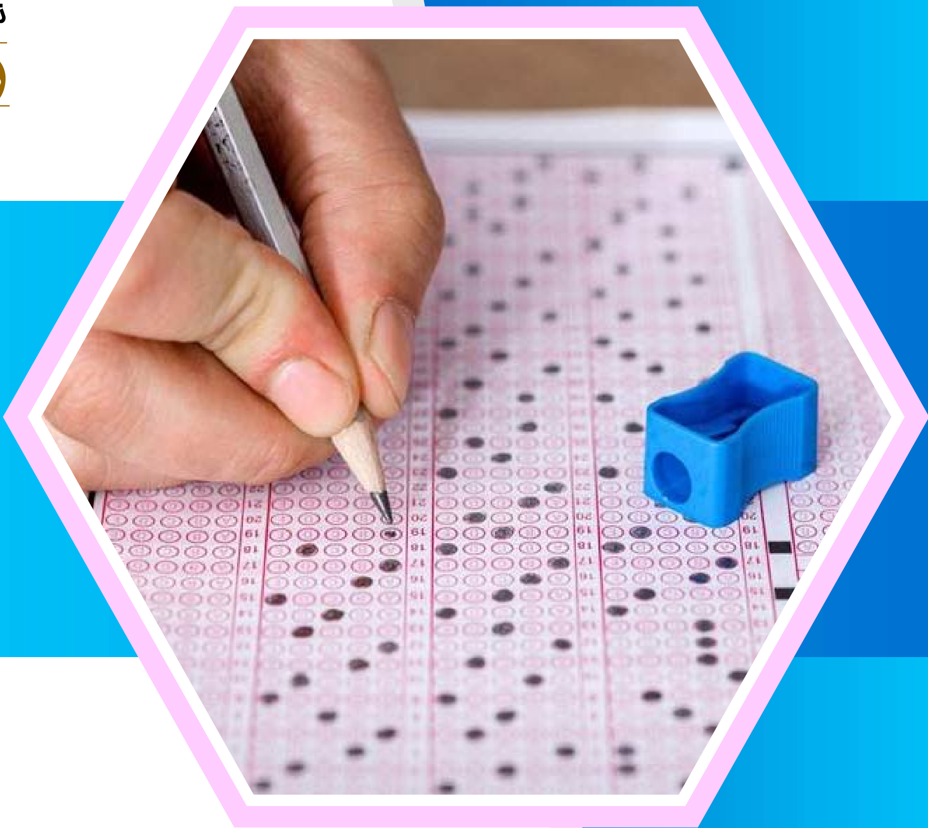
TEST

درسنامه ریاضیات کنکور

نمونه نکته و تست:

ریاضیات گسسته

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز: (منحصر به‌فرد)

جزئیات این مجموعه

آموزش کنکور
(درسنامه محور)

هسته اصلی این پک آموزشی، یک درسنامه دقیق و مفهومی، نکات و تکنیک‌های سریع با پوشش کامل از محتوای آموزشی مربوطه است.

سطح نرمال آموزش کنکوری
جهت آمادگی شرکت در آزمون‌ها و کنکور

سطح پیشرفته آموزش
ویژه کسب نمره کامل ۱۰۰٪ در آزمون‌ها و کنکور

طرح و تشریح
صدها مثال و تست متوسط، دشوار و دشوارتر

بانک تمرین تست
شامل صدها تست متوسط و دشوار (پاسخ‌نامه تشریحی جداگانه دارد.)

پوشش آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها
Up to date

TEST

فهرست

TEST

۲

نظریه اعداد (۲)

فهرست	صفحه

۱ هم‌نهشتی اعداد

یکی از مفاهیم بسیار مهم و کاربردی در بررسی خواص عددهای صحیح:

نکته ۱

اعداد هم‌نهشت:

$m>1$ را عدد طبیعی بگیرید. دو عدد صحیح a و b به پیمانه‌ی m «**هم‌نهشت**» هستند، هرگاه:

$$m|a-b$$

در این صورت می‌نویسیم: $a \overset{m}{\equiv} b$ و در غیر این‌صورت: $a \overset{m}{\not\equiv} b$.

توجه کنید:

هم‌نهشتی را به صورت زیر:

$$a \equiv b \ (\text{به پیمانه } m)$$

هم نوشته و بیان دقیق آن به زبان ریاضی چنین است:

$$\forall a,b \in \mathbb{Z}\ ,\ m \in \mathbb{N}-\{1\}:\ \ (a \overset{m}{\equiv} b \ \Leftrightarrow\ m|a-b)$$

بعلاوه؛

هم‌نهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ معادل عبارت‌های کاربردی زیر است: **(مهم)**

$$m|a-b \ \Leftrightarrow\ a-b=mk \ \Leftrightarrow\ a=b+mk$$

برای نمونه؛

$-3 \overset{5}{\equiv} 7$ است، زیرا $7-(-3)=10$ بر ۵ بخش‌پذیر است و همچنین $3 \overset{5}{\not\equiv} 7$، زیرا: $5 \nmid 7-3$.

مثال: (یک بررسی از هم‌نهشتی $\overset{3}{\equiv}$ در $\mathbb{Z}$)

در مبحث قبل دیدیم که با تقسیم عددها بر ۳، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ به سه مجموعه‌ی زیر افراز می‌شود:

$$[0]_3=\{3k \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-6,-3,0,3,6,9,\dots\}$$

$$[1]_3=\{3k+1 \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-5,-2,1,4,7,10,\dots\}$$

$$[2]_3=\{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-4,-1,2,5,8,11,\dots\}$$

از سوی دیگر، به آسانی دیده می‌شود که عددهای موجود در هر کدام از مجموعه‌های بالا، دو به دو به پیمانه‌ی ۳ هم‌نهشت هستند.

$$\dots \overset{3}{\equiv} -6 \overset{3}{\equiv} -3 \overset{3}{\equiv} 0 \overset{3}{\equiv} 3 \overset{3}{\equiv} 6 \overset{3}{\equiv} 9 \overset{3}{\equiv} \dots$$

$$\dots \overset{3}{\equiv} -5 \overset{3}{\equiv} -2 \overset{3}{\equiv} 1 \overset{3}{\equiv} 4 \overset{3}{\equiv} 7 \overset{3}{\equiv} 10 \overset{3}{\equiv} \dots$$

$$\cdots \overset{3}{\equiv} -4 \overset{3}{\equiv} -1 \overset{3}{\equiv} 2 \overset{3}{\equiv} 5 \overset{3}{\equiv} 8 \overset{3}{\equiv} 11 \overset{3}{\equiv} \cdots$$

یعنی:

عددهایی که بر ۳ باقی‌مانده‌ی یکسان دارند، با هم به پیمانه‌ی ۳ هم‌نهشت نیز هستند.

کلاس هم‌نهشتی: (مهم)

مجموعه‌ی $[0]_3$ را کلاس (یا دسته‌ی) هم‌نهشتی عدد ۰ به پیمانه‌ی ۳ می‌نامیم.

به همین ترتیب:

مجموعه‌ی $[1]_3$ را کلاس هم‌نهشتی ۱ به پیمانه‌ی ۳ و مجموعه‌ی $[2]_3$ را کلاس هم‌نهشتی ۲ به پیمانه‌ی ۳ گوئیم.

بعلاوه:

مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ توسط هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۳، دقیقاً به سه کلاس هم‌نهشتی $[0]_3$، $[1]_3$ و $[2]_3$ افراز شد.

(افراز به معنی تقسیم‌بندی یک مجموعه به چند بخش جداگانه و ناتهی است.)

با توجه به مثال قبل، موارد مهم زیر بیان می‌شود:

نکته ۲

❖ برای دو عدد صحیح a و b:

$$a \overset{m}{\equiv} b \iff \text{باقیمانده‌های تقسیم } a \text{ و } b \text{ بر } m \text{ برابر باشند.}$$

❖ مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دقیقاً به m تا دسته‌ی هم‌نهشتی زیر افراز می‌شود:

$$[0]_m ، [1]_m ، [2]_m \text{ و } \ldots \text{ و } [m-1]_m$$

بعلاوه، شرایط مهم زیر برقرار هستند:

- هر عدد صحیح در یکی از این دسته‌ها جای دارد. (طبق قضیه‌ی تقسیم)
- این دسته‌ها عدد مشترک ندارند.
- هر دسته شامل تمام عددهایی است که دو به دو به پیمانه‌ی m هم‌نهشت هستند.

بنابراین:

دو عدد a و b فقط وقتی در یک کلاس قرار می‌گیرند که $a \overset{m}{\equiv} b$.

حالت ویژه:

عدد صحیح a بر m بخش‌پذیر است، هرگاه $a \in [0]_m$ و به عبارت دیگر $a \overset{m}{\equiv} 0$ باشد.

کدام عدد زیر به کلاس هم‌ارزی $[11]$ به پیمانه‌ی ۱۸ تعلق دارد ولی در کلاس هم‌ارزی $[7]$ به پیمانه‌ی ۱۰ قرار ندارد؟

❶ ۴۷ ❷ ۲۷ ❸ ۳۵ ❹ ۶۵

گزینه ۴

عدد مورد نظر باید در $\overset{۱۸}{\equiv}$ با ۱۱ هم‌نهشت بوده ولی در $\overset{۱۰}{\equiv}$ با عدد ۷ هم‌نهشت نباشد. فقط عدد ۶۵ هر دو شرط را دارد:

- داریم $۱۱ \overset{۱۸}{\equiv} ۶۵$، زیرا عدد $۶۵-۱۱=۵۴$ بر ۱۸ بخش‌پذیر است.
- همچنین $۷ \overset{۱۰}{\not\equiv} ۶۵$ است، زیرا عدد $۶۵-۷=۵۸$ بر ۱۰ بخش‌پذیر نیست.

باقی‌مانده‌ی تقسیم سه عدد ۹۳۱، ۷۰۰ و ۶۵۸ بر عدد طبیعی $b>۱$ یکسان است. مجموع مقادیر ممکن برای این باقی‌مانده کدام است؟

❶ ۱۲ ❷ ۹ ❸ ۸ ❹ ۶

گزینه ۳

می‌دانیم هر سه عدد به پیمانه‌ی b هم‌نهشت هستند. پس b باید تفاضل آن‌ها را هم عاد کند:

$$b|۷۰۰-۶۵۸=۴۲ \Rightarrow b|۲\times۲۱ \quad و \quad b|۹۳۱-۷۰۰=۲۳۱ \Rightarrow b|۱۱\times۲۱$$

در نتیجه $b|۲۱$ و طبق شرط $b>۱$، سه جواب $b=۳,۷,۲۱$ قابل قبول است. با تقسیم یکی از عددهای داده شده بر مقادیر به‌دست آمده برای b، باقی‌مانده‌ها معلوم می‌شود:

$$۷۰۰\div۲۱ \rightarrow r=۷ \quad و \quad ۷۰۰\div۷ \rightarrow r=۰ \quad و \quad ۷۰۰\div۳ \rightarrow r=۱$$

جواب برابر $۱+۷=۸$ است.

مجموعه $[۳]_۴ \cap [۱]_۵$ برابر کدام است؟

❶ $[۱۱]_{۲۰}$ ❷ $[۱]_{۱۰}$ ❸ $[۴]_{۱۰}$ ❹ $[۳]_{۲۰}$

گزینه ۱

کافی است چند عضو هر یک از دو کلاس را بنویسیم تا مشترک‌ها مشخص شوند:

$$[۳]_۴=\dots,۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹,۲۳,۲۷,۳۱,۳۵,\dots$$
$$[۱]_۵=\dots,۱,۶,۱۱,۱۶,۲۱,۲۶,۳۱,۳۶,\dots$$

پس عضوهای مشترک $\dots,۱۱,۳۱,۵۱,\dots$ بوده و چون فاصله عددها ۲۰ است، $m=۲۰$ بوده است:

$$[۳]_۴ \cap [۱]_۵=[۱۱]_{۲۰}$$

کاربردهای بسیار بیشتری از هم‌نهشتی بعد از بیان ویژگی‌ها:

نکته ۳

ویژگی ۱:

می‌توان عدد ثابتی را در دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی اضافه یا کم کرد:

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow a+c\overset{m}{\equiv}b+c\ ,\ a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

دلیل:

چون داریم $m|a-b$، بنابراین:

$$m|a-b+\underbrace{c-c}_{=0} \;\rightarrow\; m|(a+c)-(b+c) \;\Rightarrow\; a+c\overset{m}{\equiv}b+c$$

به طریق مشابه نشان داده می‌شود که:

$$a-c\overset{m}{\equiv}b-c$$

اگر ۱۷ روز قبل شنبه باشد، ۲۳ روز بعد، چه روزی از هفته است؟

❶ چهارشنبه ❷ پنج‌شنبه ❸ جمعه ❹ شنبه

گزینه ۲

روزهای هفته را از ابتدای سال شماره‌گذاری می‌کنیم:

شنبه: ۱، یکشنبه: ۲، ... ، پنج‌شنبه: ۶، جمعه: ۷، شنبه: ۸ و ... تا پایان سال.

اکنون توجه کنید:

همه‌ی شنبه‌ها با هم، همه‌ی یکشنبه‌ها با هم و .... به پیمانه‌ی ۷ هم‌نهشت هستند.

اگر امروز، روز n ام سال باشد، طبق اطلاعات بالا:

$$n-۱۷\overset{۷}{\equiv}۱ \xrightarrow{+۴۰} n+۲۳\overset{۷}{\equiv}۴۱$$

چون $۴۱\overset{۷}{\equiv}۶$ است، پس $n+۲۳\overset{۷}{\equiv}۶$ و ۲۳ روز بعد، پنج‌شنبه خواهد بود.

نکته ۴

ویژگی ۲:

می‌توان عدد صحیح ثابتی را در دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی ضرب کرد:

$$a\overset{m}{\equiv}b \;\Rightarrow\; ac\overset{m}{\equiv}bc$$

دلیل:

$$m|a-b \;\rightarrow\; m|c(a-b) \;\rightarrow\; m|ac-bc \;\Rightarrow\; ac\overset{m}{\equiv}bc$$

توجه کنید:

خاصیت مشابه ضرب، برای تقسیم وجود ندارد.

اگر دو طرف هم‌نهشتی را بر عددی تقسیم کنید، ممکن است به یک هم نهشتی نادرست یا حتی بی معنی برسید.

برای نمونه؛

- $۱۰\overset{۱۰}{\equiv}۲۰$ است، ولی با تقسیم دو طرف بر ۲، به هم‌نهشتی نادرست $۵\overset{۱۰}{\equiv}۱۰$ می‌رسیم.
- $۱۰\overset{۱۰}{\equiv}۲۰$ است، ولی با تقسیم دو طرف بر ۴، به هم‌نهشتی بی معنی $\frac{۵}{۲}\overset{۱۰}{\equiv}۵$ خواهیم رسید.

البته:

تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد، روش و شرایط دقیقی دارد که کمی پیش‌تر خواهیم دید.

نکته ۵

ویژگی ۳:

اگر دو هم‌نهشتی به پیمانه‌ی یکسان داشته باشیم، می‌توان طرفین آن‌ها را با هم جمع، تفریق و یا ضرب کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b\ ,\ c \overset{m}{\equiv} d \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \\ ac \overset{m}{\equiv} bd \end{cases}$$

توجه کنید:

تقسیم طرفین آن‌ها بر هم نادرست یا بی‌معنی است.

دلیل:

- چون $m \mid a-b$ و $m \mid c-d$، بنابراین:

$$m \mid a-b+c-d \quad \rightarrow \quad m \mid (a+c)-(b+d) \quad \Rightarrow \quad a+c \overset{m}{\equiv} b+d$$

دلیل برقراری $a-c \overset{m}{\equiv} b-d$ به صورت مشابه.

- در مورد ضرب:

$$\left.\begin{matrix} m \mid a-b & \xrightarrow{\times c} & m \mid ac-bc \\ m \mid c-d & \xrightarrow{\times b} & m \mid bc-bd \end{matrix}\right\} \xrightarrow{+} m \mid ac-bc+bc-bd$$

$$\rightarrow \quad m \mid ac-bd \quad \Rightarrow \quad ac \overset{m}{\equiv} bd$$

دو ویژگی بعدی هم‌نهشتی، در واقع نتایج ویژگی قبل هستند.

نکته ۶

ویژگی ۴:

می‌توان دو طرف یک هم‌نهشتی را به هر توان طبیعی دلخواه رساند:

$$a \overset{m}{\equiv} b \quad \Rightarrow \quad a^n \overset{m}{\equiv} b^n$$

دلیل:

کافی است ویژگی قبل در مورد ضرب طرفین را تکرار کنیم:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{m}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \rightarrow a\times a \overset{m}{\equiv} b\times b \Rightarrow a^{۲} \overset{m}{\equiv} b^{۲}$$

اکنون به صورت مشابه:

$$\left.\begin{matrix} a^{۲} \overset{m}{\equiv} b^{۲} \\ a \overset{m}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \rightarrow a^{۲}\times a \overset{m}{\equiv} b^{۲}\times b \Rightarrow a^{۳} \overset{m}{\equiv} b^{۳}$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{matrix} a^{n-۱} \overset{m}{\equiv} b^{n-۱} \\ a \overset{m}{\equiv} b \end{matrix}\right\} \rightarrow a^{n-۱}\times a \overset{m}{\equiv} b^{n-۱}\times b \Rightarrow a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$$

نکته ۷

ویژگی ۵:

می‌توان مضربی از پیمانه را به یک سمت (یا هر دو سمت) هم‌نهشتی اضافه یا از آن کم کرد:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b+mk \\ a \overset{m}{\equiv} b-mk \end{cases}, \quad (k\in \mathbb{Z})$$

دلیل:

با استفاده از ویژگی سوم و هم‌نهشتی بدیهی $۰ \overset{m}{\equiv} mk$ می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{matrix} a \overset{m}{\equiv} b \\ ۰ \overset{m}{\equiv} mk \end{matrix}\right\} \rightarrow a\pm ۰ \overset{m}{\equiv} b\pm mk \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b\pm mk$$

در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی m سه عدد a، ۴۱ و ۱۳۲ در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند. کوچک‌ترین عدد سه رقمی a به‌طوری که مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ به تعداد کمتری کلاس هم‌ارزی افراز شود، کدام است؟

❶ ۱۰۲ ❷ ۱۰۳ ❸ ۱۰۴ ❹ ۱۰۶

گزینه ۳

می‌دانیم باید $۴۱ \overset{m}{\equiv} ۱۳۲$ باشد؛ یعنی $m|۱۳۲-۴۱$ و یا $m|۹۱$. چون $۹۱=۷\times ۱۳$ است، باید $m=۷$ باشد تا تعداد کلاس‌های هم‌ارزی، کمترین مقدار ممکن به‌دست آید. چون عددهای a و ۴۱ در یک کلاس هم‌ارزی هستند، بنابراین:

$$a \overset{۷}{\equiv} ۴۱ \rightarrow a=۴۱+۷k$$

برای سه رقمی بودن a باید داشته باشیم $۴۱+۷k\ge ۱۰۰$ و در نتیجه $k\ge \frac{۱۰۰-۴۱}{۷}=\frac{۵۹}{۷}\cong ۸/۴$. پس کمترین مقدار k برابر ۹ بوده و از آن‌جا کوچک‌ترین عدد سه رقمی a مشخص می‌شود:

$$a=41+7k \xrightarrow{k=9} a=41+7\times 9 \Rightarrow a=104$$

آخرین ویژگی، شرایط تقسیم دو طرف هم‌نهشتی بر یک عدد را بیان می‌کند. قبلاً دیدیم که:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \nrightarrow a \overset{m}{\equiv} b$$

ویژگی بسیار مهم و کاربردی:

نکته ۸

ویژگی ۶:

فرض کنید $ac \overset{m}{\equiv} bc$ باشد و بخواهیم با تقسیم دو طرف بر c، آن را حذف کنیم. ابتدا ب.م.م پیمانه‌ی m و عدد c که قصد حذف آن را داریم، مشخص می‌کنیم. مثلاً: $(c,m)=d$. سپس:
عدد c از دو طرف حذف شده و البته پیمانه هم بر d تقسیم می‌شود:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc \Rightarrow a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$$

توجه کنید:

پیمانه در هم‌نهشتی $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$ فقط ظاهر کسری دارد، ولی از آن‌جا که $d|m$، عدد $\frac{m}{d}$ طبیعی است.

نمونه‌هایی ببینید:

- در تقسیم دو طرف هم‌نهشتی $24 \overset{18}{\equiv} -12$ بر عدد ۶، چون $(6,18)=6$ است، بنابراین:

$$24\div 6 \overset{\frac{18}{6}}{\equiv} -12\div 6 \Rightarrow 4 \overset{3}{\equiv} -2$$

- می‌خواهیم دو طرف هم‌نهشتی $45 \overset{10}{\equiv} 15$ را بر ۳ تقسیم کنیم. چون $(3,10)=1$ است، عدد ۳ از دو طرف حذف می‌شود، بدون این‌که پیمانه تغییر کند؛ چون $\frac{10}{1}=10$ است:

$$15\div 3 \overset{\frac{10}{1}}{\equiv} 45\div 3 \Rightarrow 5 \overset{10}{\equiv} 15$$

حالت خاص مشاهده شده در نمونه‌ی قبل را دقیق بیان می‌کنیم:

نکته ۹

حالت خاص تقسیم:

اگر $ac \overset{m}{\equiv} bc$ باشد و $(c,m)=1$، آنگاه ضریب c از دو طرف حذف شده و پیمانه تغییر نمی‌کند:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc\ ,\ (c,m)=1 \xrightarrow{\div c} a \overset{m}{\equiv} b$$

از رابطه‌ی هم‌نهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$، کدام نتیجه‌گیری در پیمانه‌ی ۷ نادرست است؟

❶ $a \equiv 3$ ❷ $a \equiv 4$ ❸ $2a \equiv -1$ ❹ $3a \equiv 2$

گزینه ۲

هم‌نهشتی $36a \overset{84}{\equiv} 192$ را در نظر گرفته و با توجه به $(12,84)=12$، دو طرف را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم:

$$3a \overset{\frac{84}{12}}{\equiv} 16 \rightarrow 3a \overset{7}{\equiv} 16 \xrightarrow{-7} 3a \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow{\div 3} a \overset{7}{\equiv} 3$$

در همین مرحله هم می‌توان فهمید که $a \overset{7}{\equiv} 4$ غیر ممکن است؛ زیرا اگر $a \overset{7}{\equiv} 3$ و $a \overset{7}{\equiv} 4$ باشد، آنگاه با تفریق طرفین باید $1 \overset{7}{\equiv} 0$ باشد که نادرست است.

با این‌حال نادرستی گزینه‌های ۳ و ۴ را هم نشان می‌دهیم. طبق $a \overset{7}{\equiv} 3$ می‌نویسیم:

$$a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \overset{7}{\equiv} 6 \xrightarrow{-7} 2a \overset{7}{\equiv} -1$$

$$a \overset{7}{\equiv} 3 \xrightarrow{\times 3} 3a \overset{7}{\equiv} 9 \xrightarrow{-7} 3a \overset{7}{\equiv} 2$$

تسلط بر محتوای این بخش، شرط لازم برای یادگیری ادامه مطالب است!

۲ تعیین باقی‌مانده

چنان‌که دیده‌ایم، نتیجه‌ی مهمی از هم‌نهشتی $a \overset{m}{\equiv} b$ این است که:

باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m با هم برابرند.

کاربرد:

برای تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم هر عدد بر m، کافی است با استفاده‌ی مناسب از ویژگی‌ها:

آن را با یکی از عددهای ۰، ۱، ۲، ... و یا $m-1$ هم‌نهشت کنید که همان باقی‌مانده خواهد بود.

توجه کنید:

معمولاً در پایان محاسبات لازم است خاصیت: $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} b \pm mk$ را به‌کار ببریم تا سمت راست، باقی‌مانده در محدوده‌ی قابل قبول قرار گیرد. (یعنی اضافه یا کم کردن مضرب‌های پیمانه در یک طرف!)

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم x و y بر ۲۷، به ترتیب ۱۲ و ۱۳ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $2x-3y$ بر ۲۷ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ ۱۲ ❸ -15 ❹ ۱۷

گزینه ۲

باید $x \overset{27}{\equiv} 12$ و $y \overset{27}{\equiv} 13$ باشد. طبق خواص هم‌نهشتی:

$$2x \overset{27}{\equiv} 24\,,\ 3y \overset{27}{\equiv} 39 \xrightarrow{(-)} 2x-3y \overset{27}{\equiv} 24-39=-15$$

چون -15 نمی‌تواند باقی‌مانده باشد، از مضرب‌های پیمانه در سمت راست استفاده می‌کنیم:

$$2x-3y \overset{27}{\equiv} -15 \xrightarrow{+27} 2x-3y \overset{27}{\equiv} -15+27=12$$

---◈---

عدد صحیح a مضرب ۸ و باقیمانده تقسیم آن بر ۲۳ برابر ۵ است. باقیمانده تقسیم $\frac{a}{4}$ بر ۲۳ کدام است؟

(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۵ ❷ ۷ ❸ ۱۳ ❹ ۱۹

گزینه ۲

قرار می‌دهیم: $a=8k$ و باید $8k \overset{23}{\equiv} 5$ باشد. در نتیجه:

$$\xrightarrow{+23} 8k \overset{23}{\equiv} 28 \xrightarrow{\div 4} 2k \overset{23}{\equiv} 7 \quad (\text{است } \tfrac{a}{4} \text{ همان } 2k)$$

---◈---

دو عدد ۱۴۸ و ۲۳۱ در یک کلاس هم‌ارزی به پیمانه‌ی m قرار دارند. باقی‌مانده تقسیم $(m-12)!$ بر ۸۲ کدام است؟

❶ ۸۱ ❷ ۷۰ ❸ ۱ ❹ ۰

گزینه ۴

باید داشته باشیم:

$$۲۳۱ \overset{m}{\equiv} ۱۴۸ \rightarrow m|۲۳۱-۱۴۸=۸۳ \xrightarrow{m>1} m=۸۳$$

باید باقی‌مانده‌ی تقسیم !۷۱ بر ۸۲ حساب شود. چون عبارت $۸۲=۲\times۴۱$ در گسترده‌ی !۷۱ وجود دارد، این عدد بر ۸۲ بخش‌پذیر بوده و جواب برابر صفر است.

باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۷۷ برابر ۴۷ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر ۳۳ کدام نمی‌تواند باشد؟ (x عدد صحیح)

❶ ۲۵ ❷ ۱۵ ❸ ۱۴ ❹ ۳

گزینه ۲

می‌دانیم $۴۷ \overset{۷۷}{\equiv} x$ است و چون $۷۷=۷\times۱۱$، هر دوی $x \overset{۷}{\equiv} ۴۷$ و $x \overset{۱۱}{\equiv} ۴۷$ برقرار هستند. با توجه به عدد داده شده‌ی ۳۳، هم‌نهشتی دوم را به کار می‌بریم:

$$x \overset{۱۱}{\equiv} ۴۷-۴۴ \rightarrow x \overset{۱۱}{\equiv} ۳$$

چون ۳۳ مضرب ۱۱ است، جواب هر عددی باشد، لازم است در هم‌نهشتی بالا هم صدق کند؛ پس جواب تست ۱۵ است.

اگر در تقسیم اعداد طبیعی a و $a+۱۰۰$ بر عدد طبیعی b، باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۱ باشند، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

❶ ۲۲ ❷ ۳۳ ❸ ۶۶ ❹ ۱۱

گزینه ۲

باید داشته باشیم:

$$a \overset{b}{\equiv} ۱۰ \quad \text{و} \quad a+۱۰۰ \overset{b}{\equiv} ۱۱$$

با تفریق طرفین داریم:

$$a+۱۰۰-a \overset{b}{\equiv} ۱۱-۱۰ \rightarrow ۱۰۰ \overset{b}{\equiv} ۱ \rightarrow b|۹۹ \Rightarrow b=۱,۳,۹,۱۱,۳۳,۹۹$$

چون باقی‌مانده‌ی تقسیم بر b عدد ۱۱ هم می‌تواند باشد، پس $b>۱۱$ و در نتیجه:

$$\min b=۳۳$$

در ادامه‌ی این بخش، انواع حالت‌های تعیین باقی مانده‌ی تقسیم، بخش‌پذیری عددها و همچنین برخی کاربردهای آن‌ها را خواهیم دید.

نکته ۱۰

حالت ۱:

بسیاری وقت‌ها، باقی مانده‌ی تقسیم یا بخش‌پذیری عدد توان‌داری چون a^n بر عدد طبیعی m مورد نظر است.
باقی‌مانده توسط ویژگی‌های هم‌نهشتی مشخص می‌شود.

برای نمونه؛

به تعیین باقی ماندهٔ تقسیم عدد $۷^{۹۵}$ بر ۹ توجه کنید:

- ابتدا در صورت امکان سعی می‌کنیم توانی از ۷ را در $\overset{۹}{\equiv}$ با ۱+ یا ۱− هم‌نهشت سازیم. در این نمونه، این کار در دو مرحله انجام می‌شود:

$$۷ \overset{۹}{\equiv} -۲ \rightarrow (۷)^۳ \overset{۹}{\equiv} (-۲)^۳ \rightarrow ۷^۳ \overset{۹}{\equiv} -۸$$

اگر پیمانهٔ ۹ را یکبار با عدد سمت راست جمع کنیم، گام اول کامل شده است:

$$۷^۳ \overset{۹}{\equiv} -۸+۹ \rightarrow ۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

- حال ببینیم دو طرف $۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱$ را باید به چه توانی رساند که سمت چپ آن به $۷^{۹۵}$ نزدیک شود؟ با تقسیم ۹۵ بر ۳ این عدد مشخص می‌شود:

$$۹۵ \div ۳ \Rightarrow ۹۵ = ۳ \times ۳۱ + ۲$$

پس باید دو طرف را به توان ۳۱ (یعنی: خارج قسمت تقسیم) رساند:

$$۷^۳ \overset{۹}{\equiv} ۱ \rightarrow (۷^۳)^{۳۱} \overset{۹}{\equiv} (۱)^{۳۱} \rightarrow ۷^{۹۳} \overset{۹}{\equiv} ۱$$

- اکنون کافی است دو طرف را در $۷^۲$ ضرب کنیم تا $۷^{۹۵}$ ساخته شود:

$$۷^{۹۳} \overset{۹}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۷^۲} ۷^{۹۵} \overset{۹}{\equiv} ۴۹$$

استفاده از مضرب‌های پیمانه در سمت راست:

$$۷^{۹۵} \overset{۹}{\equiv} ۴۹ \xrightarrow{۵\times۹=۴۵} ۷^{۹۵} \overset{۹}{\equiv} ۴۹-۴۵ \Rightarrow ۷^{۹۵} \overset{۹}{\equiv} ۴ \leftarrow \text{باقی ماندهٔ تقسیم}$$

باقی‌ماندی تقسیم $۲^{۷۱}$ بر ۳۱ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۰ ❹ ۴

گزینه ۲

چون $۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۲^۵ = ۳۲$ است، دو طرف را به توان ۱۴ می‌رسانیم تا به $۲^{۷۱}$ نزدیک شویم:

$$(۲^۵)^{۱۴} \overset{۳۱}{\equiv} ۱^{۱۴} \rightarrow ۲^{۷۰} \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲} ۲^{۷۱} \overset{۳۱}{\equiv} ۲$$

اگر عدد $۷^{۱۳}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a، کدام است؟ **(کنکور ۹۸)**

❶ ۲ ❷ ۳ ❸ ۴ ❹ ۵

گزینه ۲

با توان‌های کوچک عدد ۷ شروع می‌کنیم:

$$۴۹ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \rightarrow ۷^۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۳ \rightarrow (۷^۲)^۳ \overset{۲۳}{\equiv} ۳^۳ \rightarrow ۷^۶ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۷ \overset{۲۳}{\equiv} ۴$$

$$\rightarrow (۷^۶)^۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۴^۲ \rightarrow ۷^{۱۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۱۳} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۱۲$$

پس $۷^{۱۳}+a \overset{۲۳}{\equiv} ۱۱۲+a$ بوده و طبق فرض باید $۱۱۲+a \overset{۲۳}{\equiv} ۰$ باشد. اکنون:

$$a \overset{۲۳}{\equiv} -۱۱۲ \overset{۲۳}{\equiv} -۱۱۲+۵\times ۲۳=۳$$

اگر $m=۱!+۲!+۳!+\cdots+۱۰۰!$ باشد، باقی‌ماندی تقسیم ۵^m بر ۳۱ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۵ ❸ ۲۵ ❹ ۱

گزینه ۴

چون $۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۱۲۵=۵^۳$ است، واضح است که: $۱ \overset{۳۱}{\equiv} (۵^۳)^{۲!}=۵^{۳!}$ و به طور مشابه $۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۵^{۴!}$ و ... و $۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۵^{۱۰۰!}$ خواهد بود.
بنابراین:

$$۵^m=۵^۱\times۵^۲\times۵^{۳!}\times۵^{۴!}\times\cdots\times۵^{۱۰۰!}\overset{۳۱}{\equiv}\underbrace{۵\times۲۵}_{=۱۲۵\overset{۳۱}{\equiv}۱}\times۱\times۱\times\cdots\times۱\overset{۳۱}{\equiv}۱$$

تذکر: (مهم)

هنگام تعیین باقی‌ماندهٔ عبارت‌های عددی یا توان‌دار، در صورتی که عددهای پایه از پیمانهٔ هم‌نهشتی بزرگ‌تر باشند، ابتدا آن‌ها را با عددهای کوچک‌تر و هم‌نهشت با آن‌ها جایگزین کنید. برای نمونه:

$$۱۲^۶ \overset{۵}{\equiv} ۲^۶ \quad و \quad ۲۵a-۱۴ \overset{۹}{\equiv} ۷a-۵$$

این کار باعث کوتاه‌تر شدن محاسبات خواهد شد.

نمونهٔ دیگر:

برای تعیین باقی ماندهٔ تقسیم عدد $۲۳^{۲۰۲۵}-۹۵$ بر ۲۱، چون $۲ \overset{۲۱}{\equiv} ۲۳$ و $۱۱ \overset{۲۱}{\equiv} ۹۵$، طبق مطلب بالا، کافی است باقی - ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۲۰۲۵}-۱۱$ بر ۲۱ را محاسبه کنیم. با توجه به $۲^۶=۶۴$ و $۳\times۲۱=۶۳$، نقطهٔ شروع مناسب مشخص می‌گردد:

$$۲۱|۶۳ \Rightarrow ۲^۶ \overset{۲۱}{\equiv} ۱$$

اگر عدد ۲۰۲۵ را بر ۶ تقسیم کنید، خارج قسمت ۳۳۷ خواهد بود و بنابراین:

$$(۲^۶)^{۳۳۷} \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \to ۲^{۲۰۲۲} \overset{۲۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۲^۳} ۲^{۲۰۲۵} \overset{۲۱}{\equiv} ۸ \xrightarrow{-۱۱} ۲^{۲۰۲۵}-۱۱ \overset{۲۱}{\equiv} -۳ \xrightarrow{+۲۱} ۲^{۲۰۲۵}-۱۱ \overset{۲۱}{\equiv} ۱۸$$

به ازای کدام مقادیر n از اعداد طبیعی، عبارت $۵^{۶n+۴}+۵^{۳n+۲}+۱$، بر عدد ۳۱ بخش‌پذیر است؟ (کنکور ۹۶)

❶ فقط اعداد فرد ❷ فقط اعداد زوج
❸ فقط اعداد مضرب ۵ ❹ تمام اعداد

گزینه ۴

توجه کنید که: $۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۱۲۵=۵^۳$. پس بسیار آسان می‌نویسیم:

$$۵^{۶n+۴}+۵^{۳n+۲}+۱=(۵^۳)^{۲n}\times۵^۴+(۵^۳)^n\times۵^۲+۱ \overset{۳۱}{\equiv} ۱\times۵^۴+۱\times۵^۲+۱$$

حاصل $۱+۵^۲+۵^۴$ برابر ۶۵۱ است که با تقسیم می‌بینید بر ۳۱ بخش‌پذیر است. پس همواره:

$$۵^{۶n+۴}+۵^{۳n+۲}+۱\overset{۳۱}{\equiv}۰$$

وقتی پیمانه عددی اول باشد، نکته‌ی بعدی معمولاً گام اول تعیین باقی مانده را سریع‌تر خواهد کرد:

نکته ۱۱

قضیه فِرما:

اگر p عددی اول و a عددی صحیح باشد که $p\nmid a$، آنگاه همواره داریم:

$$a^{p-۱}\overset{p}{\equiv}۱$$

برای نمونه:

عدد ۷ اول است و $۷\nmid ۱۸$، در نتیجه $۱۸^۶\overset{۷}{\equiv}۱$ است.

باقی‌مانده تقسیم $۳^{۴۸}$ بر ۱۱ کدام است؟

❶ ۵ ❷ ۶ ❸ ۷ ❹ ۸

گزینه ۱

چون ۱۱ عددی اول است و $۱۱\nmid ۳$، نقطه‌ی شروعِ هم‌نهشتی طبق رابطه‌ی فرما سریع مشخص می‌شود:

$$۳^{۱۱-۱}\overset{۱۱}{\equiv}۱\rightarrow ۳^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

- مشابه موارد بخش قبلی، دو طرف را به توان ۴ می‌رسانیم:

$$۳^{۴۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$$

- اکنون لازم است طی چند مرحله مشخص کنیم عدد $۳^۸$ به پیمانه ۱۱ با چه عددی هم‌نهشت است:

$$۳^۲=۹\rightarrow ۳^۲\overset{۱۱}{\equiv}-۲\rightarrow (۳^۲)^۴\overset{۱۱}{\equiv}(-۲)^۴\rightarrow ۳^۸\overset{۱۱}{\equiv}۱۶\Rightarrow ۳^۸\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

- از ضرب دو طرف هم‌نهشتی‌های $۳^{۴۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$ و $۳^۸\overset{۱۱}{\equiv}۵$ جواب مورد نظر به‌دست خواهد آمد:

$$۳^{۴۰}\times ۳^۸\overset{۱۱}{\equiv}۱\times ۵\Rightarrow ۳^{۴۸}\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

روش دوم:

با استفاده از ویژگی تقسیم هم‌نهشتی، محاسبات کوتاه‌تر می‌شود:

بعد از هم‌نهشتی $۳^{۱۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$ می‌توان نوشت: $(۳^{۱۰})^۵\overset{۱۱}{\equiv}۱^۵$ و در نتیجه: $۳^{۵۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱$. اکنون عدد سمت راست را با عددهای مناسبی جایگزین کرده تا با تقسیم بر ۳، از توان دو واحد کم شود:

$$۳^{۵۰}\overset{۱۱}{\equiv}۱+۱۱=۱۲\xrightarrow{\div ۳}۳^{۴۹}\overset{۱۱}{\equiv}۴\rightarrow ۳^{۴۹}\overset{۱۱}{\equiv}۴+۱۱=۱۵\xrightarrow{\div ۳}۳^{۴۸}\overset{۱۱}{\equiv}۵$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی n که برای آن داشته باشیم $۳۱^۹+n \overset{۱۱}{\equiv} ۸^{۵۳}$ کدام است؟

❶ ۹ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۲

چون $۳۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۹$، پس $۳۱^۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۹^۹$ و لذا کافی است به جای $۳۱^۹$ با $۹^۹$ کار کنیم. طبق فرما:

$$۹^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{+۴\times ۱۱} ۹^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱+۴۴ \to ۹^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۴۵ \xrightarrow{\div ۹} ۹^۹ \overset{۱۱}{\equiv} ۵$$

به صورت مشابه، در مورد عدد $۸^{۵۳}$ می‌نویسیم:

$$۸^{۱۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \to (۸^{۱۰})^۵ \overset{۱۱}{\equiv} (۱)^۵ \to ۸^{۵۰} \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۸^۲} ۸^{۵۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۶۴ \xrightarrow{-۶\times ۱۱} ۸^{۵۲} \overset{۱۱}{\equiv} ۶۴-۶۶$$

$$\to ۸^{۵۲} \overset{۱۱}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\times ۸} ۸^{۵۳} \overset{۱۱}{\equiv} -۱۶ \xrightarrow{+۲\times ۱۱} ۸^{۵۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۶$$

اکنون عددهای به‌دست آمده را در عبارت اولیه جایگزین می‌سازیم:

$$۵+n \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \to n \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow n=۱+۱۱k$$

اگر در عبارت $۱+۱۱k$ جای k مقدار صفر قرار گیرد، کوچک‌ترین عدد طبیعی $n=۱$ به‌دست خواهد آمد.

نکته ۱۲

حالت ۲: (تعیین ارقام)

موارد زیر (بویژه مورد اول) اهمیت بسیار دارند:

- برای تعیین یکان یک عدد، (یعنی رقم سمت راست)، کافی است باقی‌مانده‌ی آن عدد بر ۱۰ تعیین شود.
- برای تعیین دو رقم سمت راست کافی است همنهشتی به پیمانه ۱۰۰ بررسی گردد.

دو رقم سمت راست عدد $۳\times ۷^{۴۹۶}+۱۰۲۱$ کدام است؟

❶ ۱۴ ❷ ۲۴ ❸ ۴۴ ❹ ۶۴

گزینه ۲

هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰۰:

با محاسبه‌ی چند توان از ۷ می‌بینیم که $۷^۴=۲۴۰۱$ است:

$$۷^۴ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \to (۷^۴)^{۱۲۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \to ۷^{۴۹۶} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳\times ۷^{۴۹۶} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳$$

از طرفی چون $۱۰۲۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۲۱$ است، با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها داریم:

$$۳\times ۷^{۴۹۶}+۱۰۲۱ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳+۲۱=۲۴$$

دو عدد $a^۲-۱$ و $۱۴a+۶$ رقم یکان برابر دارند. رقم یکان عدد $a^۲+a$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۸ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۷

گزینه ۳

طبق فرض داریم:

$$a^۲-۱\overset{۱۰}{\equiv}۱۴a+۶ \to a^۲-۱۴a-۷\overset{۱۰}{\equiv}۰ \xrightarrow[-۷\overset{۱۰}{\equiv}۳]{-۱۴a\overset{۱۰}{\equiv}-۴a} a^۲-۴a+۳\overset{۱۰}{\equiv}۰ \to (a-۱)(a-۳)\overset{۱۰}{\equiv}۰$$

سه حالت زیر می‌تواند رخ دهد که بررسی هر کدام برای تعیین جواب کافی است:

$$(a-۱\overset{۱۰}{\equiv}۰ \text{ یا } a-۳\overset{۱۰}{\equiv}۰) \text{ و } (a-۱\overset{۵}{\equiv}۰ \text{ و } a-۳\overset{۲}{\equiv}۰) \text{ و } (a-۱\overset{۲}{\equiv}۰ \text{ و } a-۳\overset{۵}{\equiv}۰)$$

بررسی حالت سمت چپ:

$$a-۱\overset{۲}{\equiv}۰ \to a\overset{۲}{\equiv}۱ \xrightarrow{a^۲\overset{۲}{\equiv}۱} a^۲+a\overset{۲}{\equiv}۱+۱=۲$$

$$a-۳\overset{۵}{\equiv}۰ \to a\overset{۵}{\equiv}۳ \xrightarrow{a^۲\overset{۵}{\equiv}۹} a^۲+a\overset{۵}{\equiv}۹+۳\overset{۵}{\equiv}۲$$

پس جواب برابر ۲ بوده است. (انتخاب دو حالت دیگر نیز به همین جواب منجر می‌شود.)

گسترده‌ی اعداد:

گسترده‌ی عددی مانند ۲۹۵ به صورت زیر است:

$$۲۹۵=۲\times۱۰^۲+۹\times۱۰^۱+۵$$

به همین ترتیب، یک عدد دلخواه را به صورت $\overline{a_n\,a_{n-1}\ldots a_۲\,a_۱\,a_۰}$ نشان می‌دهیم که دارای $n+۱$ رقم بوده و گسترده‌ی آن برابر است با:

$$a_n\times۱۰^n+a_{n-1}\times۱۰^{n-1}+\cdots+a_۲\times۱۰^۲+a_۱\times۱۰+a_۰$$

برای نمونه:

عددهای دلخواه دو رقمی و سه رقمی به صورت‌های $\overline{ab}$ و $\overline{abc}$ نوشته شده و گسترده‌ی آن‌ها چنین است:

$$\overline{ab}=۱۰a+b \quad \text{و} \quad \overline{abc}=۱۰۰a+۱۰b+c$$

عدد $m=\overline{abab}+\overline{ab۰ab}$ به کدام عدد زیر ممکن است بخش‌پذیر نباشد؟

❶ ۱۹ ❷ ۲۹ ❸ ۳۷ ❹ ۳۸

گزینه ۳

عددها را به صورت گسترده نوشته و نمایش جمع را تا حد ممکن ساده می‌نویسیم:

$$m=۱۰۰۰a+۱۰۰b+۱۰a+b+۱۰۰۰۰a+۱۰۰۰b+۰+۱۰a+b$$

$$=۱۱۰۲۰a+۱۱۰۲b=\underbrace{۱۱۰۲}_{=۲\times۱۹\times۲۹}(۱۰a+b)=۲\times۱۹\times۲۹\times\overline{ab}$$

می‌بینید که m بر هر سه عدد ۱۹ و ۲۹ و ۳۸ الزاماً بخش‌پذیر است.

نکته ۱۳

حالت ۳ : (باقی‌مانده بر ۲ و ۵)

یک عدد هنگامی بر ۲ و یا ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن بر این اعداد بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{\text{۲ یا ۵}}{\equiv} a_0$$

دلیل:

از آنجا که برای هر k داریم: $(10^k \overset{2}{\equiv} 0 \Leftarrow 10 \overset{2}{\equiv} 0)$ و $(10^k \overset{5}{\equiv} 0 \Leftarrow 10 \overset{5}{\equiv} 0)$ است، بنابراین به پیمانه‌ی ۲ یا ۵ خواهیم داشت:

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n \times 0 + a_{n-1} \times 0 + \cdots + a_2 \times 0 + a_1 \times 0 + a_0 \equiv a_0$$

نکته ۱۴

حالت ۴ : (باقی‌مانده بر ۳ و ۹)

به آسانی می‌توان نشان داد همنهشتی زیر برقرار است:

$$\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0} \overset{\text{۳ یا ۹}}{\equiv} a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

در نتیجه:

- در تقسیم بر ۳ یا ۹ باقی‌مانده با مجموع ارقام عدد به پیمانه‌ی ۳ یا ۹ همنهشت است.
- یک عدد وقتی بر ۳ یا ۹ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن با صفر همنهشت شود.

دلیل:

از آنجا که برای هر k داریم: $(10^k \overset{3}{\equiv} 1 \Leftarrow 10 \overset{3}{\equiv} 1)$ و $(10^k \overset{9}{\equiv} 1 \Leftarrow 10 \overset{9}{\equiv} 1)$ است، بنابراین بـه پیمانـه‌ی ۳ یـا ۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10 + a_0 &\equiv a_n \times 1 + a_{n-1} \times 1 + \cdots + a_2 \times 1 + a_1 \times 1 + a_0 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

فرض کنید عدد $\overline{4773a}$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۵ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۲

طبق قاعده‌ی بالا باید داشته باشیم:

$$4 + 7 + 7 + 3 + a \overset{9}{\equiv} 0 \rightarrow 21 + a \overset{9}{\equiv} 0$$

چون a یک رقم است، باید کمتر از ۱۰ باشد و بنابراین فقط $a=۶$ قابل قبول خواهد بود. در نتیجه:

$$\overline{۴۱۷۳۶} \overset{۵}{\equiv} ۶ \overset{۵}{\equiv} ۱$$

نکته ۱۵

حالت ۵ : (باقی‌مانده بر ۱۱)

به آسانی می‌توان نشان داد همنهشتی زیر برقرار است:

$$\overline{a_n a_{n-۱} \dots a_۲ a_۱ a_۰} \overset{۱۱}{\equiv} a_۰ - a_۱ + a_۲ - a_۳ + \cdots$$

یعنی:

از رقم یکان شروع کرده و ارقام را یک در میان جمع و تفریق می‌کنیم تا پایان یابند.

برای نمونه؛

باقی ماندهٔ تقسیم ۹۴۷ بر ۱۱ برابر ۱ است:

$$۹۴۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۷-۴+۹ \to ۹۴۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{-۱۱} ۹۴۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲-۱۱=۱$$

دلیل نکتهٔ قبل:

از آن‌جا که $۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} -۱$ است، برای هر k زوج $۱۰^k \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ و برای هر k فرد $۱۰^k \overset{۱۱}{\equiv} -۱$ خواهد بود. پس:

$$a_n \times ۱۰^n + a_{n-۱} \times ۱۰^{n-۱} + \cdots + a_۲ \times ۱۰^۲ + a_۱ \times ۱۰ + a_۰ \overset{۱۱}{\equiv} \cdots + a_۴ \times (۱) + a_۳ \times (-۱) + a_۲ \times (۱) + a_۱ \times (-۱) + a_۰$$

$$\overset{۱۱}{\equiv} \cdots + a_۴ - a_۳ + a_۲ - a_۱ + a_۰$$

اگر $۷+۵^k$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم بزرگ‌ترین عدد دو رقمی k بر ۱۱ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۹ ❹ ۱۰

گزینهٔ ۴

باید داشته باشیم:

$$۵^k \overset{۱۱}{\equiv} -۷ \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

به آسانی دیده می‌شود که $۵^۳ = ۱۲۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۴$. از طرفی $۵^۲ = ۲۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۳$ بوده و بنابراین $۵^۵ = ۵^۳ \times ۵^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۴ \times ۳ = ۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ است. در نتیجه:

$$(۵^۵)^n \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \xrightarrow{\times ۵^۳ \overset{۱۱}{\equiv} ۴} ۵^{۵n+۳} \overset{۱۱}{\equiv} ۴$$

تعیین بزرگ‌ترین توان دو رقمی:

$$۵n+۳ < ۱۰۰ \to n < \frac{۹۷}{۵} = ۱۹/۴ \xrightarrow{n=۱۹} ۵(۱۹)+۳ = ۹۸ \Rightarrow ۹۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸-۹ = -۱ \overset{۱۱}{\equiv} -۱+۱۱ = ۱۰$$

توجه کنید: (مهم)

اگر عدد a بر عددی بخش‌پذیر باشد، a بر تمام مقسوم‌علیه‌های آن عدد نیز بخش‌پذیر خواهد بود.

برای نمونه؛

اگر عددی بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، آن عدد هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است و هم بر ۹.

عدد شش رقمی $\overline{۵a۷b۲۴}$ بر ۴۴ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۹ کدام خواهد بود؟

❶ ۳ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۲

طبق نکته‌ی قبل، این عدد باید بر ۱۱ هم بخش‌پذیر باشد:

$$\overline{۵a۷b۲۴} \overset{۱۱}{\equiv} ۴-۲+b-۷+a-۵=a+b-۱۰ \rightarrow a+b-۱۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \Rightarrow a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$$

توجه کنید که $۰ \le a \le ۹$ و $۰ \le b \le ۹$ هستند و در نتیجه $۰ \le a+b \le ۱۸$ است. بدیهی است که با توجه به هم‌نهشتی $a+b \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰$ فقط $a+b=۱۰$ قابل قبول خواهد بود. اکنون باقی مانده‌ی تقسیم بر ۹ :

$$\overline{۵a۷b۲۴} \overset{۹}{\equiv} ۵+a+۷+b+۲+۴=\underbrace{a+b}_{=۱۰}+۱۸ \rightarrow \overline{۵a۷b۲۴} \overset{۹}{\equiv} ۲۸ \overset{۹}{\equiv} ۱$$

عدد نُه رقمی $\overline{aaabbbccc}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. کدام عدد سه یا چهار رقمی زیر بر ۳۳ تقسیم‌پذیر است؟

❶ $aabb$ ❷ $aacc$ ❸ cba ❹ cab

گزینه ۳

عدد داده شده هم بر ۹ بخش‌پذیر است و هم بر ۱۱. طبق قواعد مربوطه:

$$\overline{aaabbbccc} \overset{۹}{\equiv} a+a+a+b+b+b+c+c+c \rightarrow \overline{aaabbbccc} \overset{۹}{\equiv} ۳(a+b+c) \Rightarrow ۳(a+b+c) \overset{۹}{\equiv} ۰$$

با استفاده از قاعده‌ی تقسیم، دو طرف را به ۳ ساده کرده و خواهیم داشت: $a+b+c \overset{۳}{\equiv} ۰$. همچنین طبق فرض:

$$\overline{aaabbbccc} \overset{۱۱}{\equiv} c-c+c-b+b-b+a-a+a \rightarrow \overline{aaabbbccc} \overset{۱۱}{\equiv} c-b+a \Rightarrow c-b+a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$$

اکنون توجه کنید که هم‌نهشتی‌های به‌دست آمده‌ی $a+b+c \overset{۳}{\equiv} ۰$ و $c-b+a \overset{۱۱}{\equiv} ۰$ دقیقاً به این معنی هستند که عدد سه رقمی cba هم بر ۳ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر بوده و در نتیجه بر ۳۳ نیز بخش‌پذیر خواهد بود.

چند عدد پنج‌رقمی به صورت $\overline{a۸۳b۵}$ وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۳۳ برابر ۱ باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۰

گزینه ۳

چون $\overline{a۸۳b۵} \overset{۳۳}{\equiv} ۱$ است، پس باید $\overline{a۸۳b۵} \overset{۳}{\equiv} ۱$ و $\overline{a۸۳b۵} \overset{۱۱}{\equiv} ۱$ باشد. یعنی:

$$۵-b+۳-۸+a \overset{۱۱}{\equiv} ۱ \rightarrow a-b \overset{۱۱}{\equiv} ۱$$

$$a+8+3+b+5\overset{3}{\equiv}1 \rightarrow a+b\overset{3}{\equiv}-15 \rightarrow a+b\overset{3}{\equiv}0$$

طبق شرط اول، تمام حالاتی که a یک واحد از b بزرگ‌تر باشد، مورد قبول است:

$$(a=1,b=0)\ ,\ (a=2,b=1)\ ,\ \dots,\ (a=9,b=8)$$

در بین این حالات، فقط سه حالت زیر شرط دوم را هم برآورده می‌کنند:

$$(a=2,b=1)\ ,\ (a=5,b=4)\ ,\ (a=8,b=7)$$

---◈---

اگر عدد چهار رقمی $\overline{a2bc}$ بر اعداد ۲، ۳، ۵ و ۱۱ بخش‌پذیر باشد، مجموع ارقام این عدد کدام است؟

❶ ۹ ❷ ۱۲ ❸ ۱۵ ❹ ۱۸

گزینه ۳

طبق بخش‌پذیری بر ۲ و ۵ باید $c=0$ باشد. چون $\overline{a2b0}\overset{11}{\equiv}0$ است:

$$0-b+2-a\overset{11}{\equiv}0 \rightarrow a+b\overset{11}{\equiv}2 \Rightarrow a+b=2 \quad \text{یا} \quad a+b=13$$

فقط در حالت $a+b=13$ رابطه‌ی $\overline{a2b0}\overset{3}{\equiv}0$ برقرار است و در نتیجه جمع ارقام:

$$a+2+b+0=13+2=15$$

---◈---

دو قاعده‌ی دیگر:

- **باقی‌مانده بر ۴ :**

کافی است دو رقم سمت راست عدد را در نظر گرفته و یکان را با دو برابر دهگان جمع کنیم:

$$\overline{a_n\,a_{n-1}\,\dots\,a_2\,a_1\,a_0}\overset{4}{\equiv}\overline{a_1a_0}\overset{4}{\equiv}2a_1+a_0$$

دلیل:

$10\overset{4}{\equiv}2$ است و برای $k>1$ داریم: $10^k\overset{4}{\equiv}0$.

- **باقی‌مانده بر ۸ :**

مشابه مورد قبل، باقی مانده با توجه به سه رقم سمت راست معلوم می‌شود:

$$\overline{a_n\,a_{n-1}\,\dots\,a_2\,a_1\,a_0}\overset{8}{\equiv}\overline{a_2\,a_1\,a_0}\overset{8}{\equiv}4a_2+2a_1+a_0$$

دلیل:

$10\overset{8}{\equiv}2$ و $10^2\overset{8}{\equiv}4$ است و برای $k>2$ داریم: $10^k\overset{8}{\equiv}0$.

عدد پنج رقمی $\overline{a746b}$ مضرب ۳۶ می‌باشد. باقی مانده‌ی تقسیم بزرگ‌ترین عدد N بر ۱۱ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ ۱ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ ۳

گزینه ۱

چون $36=4\times9$ است، عدد داده شده باید بر ۴ و ۹ بخش‌پذیر باشد:

$$\overline{a\text{۷۴۶}b} \overset{\text{۴}}{\equiv} \text{۲}\times\text{۶}+b \overset{\text{۴}}{\equiv} \text{۰} \to \text{۱۲}+b \overset{\text{۴}}{\equiv} \text{۰} \Rightarrow b \overset{\text{۴}}{\equiv} \text{۰} \to b=\text{۰},\text{۴},\text{۸}$$

$$\overline{a\text{۷۴۶}b} \overset{\text{۹}}{\equiv} a+\underbrace{\text{۷}+\text{۴}+\text{۶}}_{\overset{\text{۹}}{\equiv}-\text{۱}}+b \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۰} \Rightarrow a+b \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۱}$$

با استفاده از شرط اول، بزرگ‌ترین a را مشخص می‌کنیم:

$$b=\text{۰} \to a+\text{۰} \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۱} \Rightarrow a=\text{۱}$$

$$b=\text{۴} \to a+\text{۴} \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۱} \Rightarrow a=\text{۶} \quad ☑$$

$$b=\text{۸} \to a+\text{۸} \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۱} \Rightarrow a=\text{۲}$$

پس بزرگ‌ترین N برابر ۶۷۴۶۴ بوده و:

$$\text{۶۷۴۶۴} \overset{\text{۱۱}}{\equiv} \text{۴}-\text{۶}+\text{۴}-\text{۷}+\text{۶}=\text{۱}$$

---◈---

عدد $A=\overline{a\text{۲۳}b\text{۵}c}$ بر ۹۹۰ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده‌ی تقسیم A بر ۸ کدام است؟

❶ ۵ ❷ ۶ ❸ ۳ ❹ ۴

گزینه ۲

واضح است که باید $c=\text{۰}$ بوده و عدد $\overline{a\text{۲۳}b\text{۵}}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد:

$$a+\text{۲}+\text{۳}+b+\text{۵} \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۰} \to a+b \overset{\text{۹}}{\equiv} -\text{۱} \overset{\text{۹}}{\equiv} \text{۸}$$

$$\text{۵}-b+\text{۳}-\text{۲}+a \overset{\text{۱۱}}{\equiv} \text{۰} \to a-b \overset{\text{۱۱}}{\equiv} -\text{۶} \overset{\text{۱۱}}{\equiv} \text{۵}$$

تنها $a=\text{۱}$ و $b=\text{۷}$ در هر دو شرط بالا صادق هستند. پس $A=\text{۱۲۳۷۵۰}$ بوده و:

$$\text{۱۲۳۷۵۰} \overset{\text{۸}}{\equiv} \text{۴}(\text{۷})+\text{۲}(\text{۵})+\text{۰}=\text{۳۸} \overset{\text{۸}}{\equiv} \text{۳۸}-\text{۴}\times\text{۸}=\text{۶}$$

---◈---

میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه رقمی به صورت $\overline{aba}$ که مضرب عدد ۱۲ باشند، کدام است؟ **(کنکور ۱۴۰۰)**

❶ ۳۴۸ ❷ ۵۴۰ ❸ ۵۷۰ ❹ ۵۷۴

گزینه ۳

باید عدد $\overline{aba}$ هم بر ۴ و هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد. بررسی بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین به صورت زیر:

- باید a زوج بوده و $\text{۲}b+a$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
- برای a و b، کمترین و بیشترین رقم‌هایی قرار دهیم که $a+b+a=\text{۲}a+b$ نیز بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

کوچک‌ترین:

$a=\text{۲}$ را گرفته و با امتحان b از ۰ به بالا، کمترین مقدار $b=\text{۵}$ حاصل می‌شود. نتیجه: ۲۵۲

بزرگ‌ترین:

$a=\text{۸}$ را گرفته و با امتحان b از ۹ به پایین، بیشترین مقدار $b=\text{۸}$ حاصل می‌شود. نتیجه: ۸۸۸

جواب:

$$\frac{252+888}{2}=\frac{1140}{2}=570$$

---

۳ معادله‌ی سیاله

حل سریع معادلات هم‌نهشتی به شکل کلی $ax \overset{m}{\equiv} b$، کاربردهایی فراوان، از جمله در حل معادله‌ی سیاله دارد. در حل معادله‌ی هم‌نهشتی، جهت‌گیری روش حل، با استفاده از خاصیت تقسیم، چنین است:

حذف ضریب x یعنی a و سپس نوشتن تمام جواب‌های x.

نکته ۱۶

شرط وجود جواب:

معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است، هرگاه:

$$(a,m)|b$$

برای نمونه؛

چون $۸ | \underbrace{(۵,۱۳)}_{۱}$، معادله‌ی $۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۸$ دارای جواب بوده و آن را مشخص می‌کنیم. باید با فراهم کردن شرایط، از ویژگی تقسیم استفاده کرده و در چند مرحله، ضریب x از بین برود:

$$۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۸ \xrightarrow{-۱۳} ۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۸-۱۳ \rightarrow ۵x \overset{۱۳}{\equiv} -۵ \xrightarrow{\div ۵} x \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

بنابراین جواب‌های x به صورت $-۱+۱۳k$ خواهند بود. (k عددی صحیح.)

هرگاه دو عدد $۱-۴a$ و $۸a-۵$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۱ قرار داشته باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۲-۳a+۲$ بر ۱۱ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۵ ❸ ۷ ❹ ۹

گزینه ۴

مقادیر a را با حل معادله‌ی هم‌نهشتی معلوم می‌کنیم:

$$۸a-۵ \overset{۱۱}{\equiv} ۱-۴a \rightarrow ۱۲a \overset{۱۱}{\equiv} ۶ \xrightarrow{-۱۱a} a \overset{۱۱}{\equiv} ۶$$

اکنون عبارت $a^۲-۳a+۲$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} a^۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۶^۲ \\ ۳a \overset{۱۱}{\equiv} ۳\times ۶ \end{array}\right\} \rightarrow a^۲-۳a+۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۶-۱۸+۲=۲۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۹$$

دو رقم سمت راست عدد $۴۰m$ برابر ۶۰ است. رقم یکان m کدام است؟ $(m>۰)$

❶ ۴ یا ۷ ❷ ۹ یا ۷ ❸ ۳ یا ۸ ❹ ۴ یا ۹

گزینه ۴

فرض را بر حسب هم‌نهشتی نوشته و معادله را حل می‌کنیم:

$$۴۰m \overset{۱۰۰}{\equiv} ۶۰ \xrightarrow{\div ۲۰} ۲m \overset{۵}{\equiv} ۳+۵ \xrightarrow{\div ۲} m \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow m = ۴+۵k$$

جواب‌های m به صورت $۴,۹,۱۴,۱۹,\dots$ خواهد بود.

---◈---

در معادله‌ی $۳۹x \overset{۱۵}{\equiv} ۱!+۲!+\cdots+۱۰۰!$، تعداد جواب‌های طبیعی یک رقمی کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

گزینه ۳

در سمت راست، از $۵!$ به بعد، تمام عددها بر ۱۵ بخش‌پذیر هستند:

$$۳۹x \overset{۱۵}{\equiv} ۱!+۲!+۳!+۴! \xrightarrow{-۴۵x} -۶x \overset{۱۵}{\equiv} ۱+۲+\underbrace{۶+۲۴}_{۳۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۰} \to ۶x \overset{۱۵}{\equiv} -۳-۱۵ \to ۶x \overset{۱۵}{\equiv} -۱۸$$

$$\xrightarrow{\div ۶} x \overset{۵}{\equiv} -۳ \to x = -۳+۵k \Rightarrow x = ۲,۷$$

---◈---

اگر $۷۵x \overset{۱۲}{\equiv} ۵۴$ باشد، عدد x به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۸ می‌تواند متعلق باشد؟

❶ [۳] ❷ [۴] ❸ [۵] ❹ [۶]

گزینه ۴

با حذف مناسب مضارب ۱۲، از سمت چپ $۷۲x$ و از سمت راست ۴۸ را کم می‌کنیم: $۳x \overset{۱۲}{\equiv} ۶$. اکنون می‌نویسیم:

$$۳x \overset{۱۲}{\equiv} ۶ \xrightarrow{\div ۳} x \overset{۴}{\equiv} ۲ \to x = ۲+۴k \Rightarrow x = \dots,۲,۶,۱۰,۱۴,\dots$$

جواب‌های $x = ۶,۱۴,\dots$ در دسته‌ی هم‌نهشتی [۶] واقع هستند.

---◈---

باقی مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی A بر ۲۳ برابر ۵ و باقی مانده‌ی تقسیم دو برابر عدد A بر ۱۷ برابر ۹ می‌باشد. باقی مانده‌ی تقسیم بزرگ‌ترین عدد سه رقمی A بر ۱۲ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ ۰ ❷ ۶ ❸ ۲ ❹ ۷

گزینه ۱

طبق فرض می‌نویسیم:

$$A \overset{۲۳}{\equiv} ۵ \quad \text{و} \quad ۲A \overset{۱۷}{\equiv} ۹$$

از هم‌نهشتی سمت چپ داریم: $A = ۵+۲۳k$ و از هم‌نهشتی سمت راست:

$$۲A \overset{۱۷}{\equiv} ۹-۱۷ = -۸ \xrightarrow{\div ۲} A \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۵+۲۳k \overset{۱۷}{\equiv} -۴$$

معادله‌ی هم‌نهشتی را حل می‌کنیم:

$$۲۳k \overset{۱۷}{\equiv} -۹ \xrightarrow{-۱۷k} ۶k \overset{۱۷}{\equiv} -۹ \xrightarrow{\div ۳} ۲k \overset{۱۷}{\equiv} -۳+۱۷=۱۴ \xrightarrow{\div ۲} k \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$

پس $k=۱۷k'+۷$ است. با جایگذاری k در خط سوم و سپس طبق شرط ذکر شده در سؤال داریم:

$$A=۵+۲۳(۱۷k'+۷)=۳۹۱k'+۱۶۶<۱۰۰۰ \Rightarrow k'<\frac{۸۳۴}{۳۹۱}\cong ۲/۱$$

بزرگ‌ترین عدد سه رقمی $A=۳۹۱(۲)+۱۶۶=۹۴۸$ بوده و با تقسیم آن بر ۱۲، باقی‌مانده صفر خواهد شد.

---◈---

عدد $A=\overline{۸b۶aa}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. چند عدد سه رقمی فرد در معادله‌ی $ax \overset{b}{\equiv} ۱$ صدق می‌کند؟

❶ ۳۰۰ ❷ ۲۹۹ ❸ ۱۴۹ ❹ ۱۵۰

گزینه ۴

عدد A بر ۱۱ (و ۹) بخش‌پذیر است:

$$a-a+۶-b+۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \rightarrow b \overset{۱۱}{\equiv} ۱۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۳ \Rightarrow b=۳ \xrightarrow{A \overset{۹}{\equiv} ۰} ۸+۳+۶+۲a \overset{۹}{\equiv} ۰$$

$$\rightarrow ۲a \overset{۹}{\equiv} -۱۷ \xrightarrow{+۲۷} ۲a \overset{۹}{\equiv} ۱۰ \xrightarrow{\div ۲} a \overset{۹}{\equiv} ۵ \Rightarrow a=۵$$

پس باید معادله‌ی $۵x \overset{۳}{\equiv} ۱$ حل شده و جواب‌های مورد نظر شمرده شوند:

$$۵x \overset{۳}{\equiv} ۱+۹=۱۰ \xrightarrow{\div ۵} x \overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow x=۳k+۲ \xrightarrow{۱۰۰\le ۳k+۲\le ۹۹۹} \frac{۹۸}{۳}\le k\le \frac{۹۹۷}{۳}$$

بنابراین $۳۲/۶\le k\le ۳۳۲/۳$ بوده و مقادیر $۳۳, ۳۵, ۳۷, \dots, ۳۳۱$ قابل قبول هستند. تعداد آن‌ها:

$$\frac{۳۳۱-۳۳}{۲}+۱=۱۴۹+۱=۱۵۰$$

---◈---

اگر عدد $۲x^۲-x-۶$ مضرب ۵۳ باشد، رقم یکان بزرگ‌ترین عدد سه رقمی x کدام است؟ (کنکور ۹۴)

❶ ۹ ❷ ۸ ❸ ۷ ❹ ۶

گزینه ۱

تجزیه‌ی عبارت $۲x^۲-x-۶$ (روش A گیری از پایه نهم) به صورت $(x-۲)(۲x+۳)$ است. طبق فرض $۵۳\mid(x-۲)(۲x+۳)$ و چون ۵۳ عددی اول است:

$$۵۳\mid x-۲ \quad \text{یا} \quad ۵۳\mid ۲x+۳$$

باید بزرگ‌ترین عدد سه رقمی در بین دو حالت بالا را مشخص کنیم:

- **حالت ۱:** اگر $۵۳\mid x-۲$، آنگاه:

$$x-۲=۵۳k \rightarrow x=۵۳k+۲ \rightarrow ۵۳k+۲<۱۰۰۰ \rightarrow k<\frac{۹۹۸}{۵۳}\cong ۱۸/۸$$

بیشترین مقدار k برابر ۱۸ بوده و در نتیجه بزرگ‌ترین عدد سه رقمی $x=۵۳\times ۱۸+۲=۹۵۶$ خواهد بود.

- **حالت ۲:** اگر $۵۳\mid ۲x+۳$، چون x ضریب ۲ دارد، باید معادله‌ی همنهشتی تشکیل دهیم:

$$۲x \overset{۵۳}{\equiv} -۳ \xrightarrow{+۵۳} ۲x \overset{۵۳}{\equiv} ۵۰ \xrightarrow{\div ۲} x \overset{۵۳}{\equiv} ۲۵ \Rightarrow x=۲۵+۵۳k$$

مشابه حالت ۱، بزرگ‌ترین عدد سه رقمی مشخص می‌شود:

$$۵۳k+۲۵<۱۰۰۰ \rightarrow k<\frac{۹۷۵}{۵۳}\cong ۱۸/۳ \rightarrow \max k=۱۸ \Rightarrow \max x=۲۵+۵۳\times ۱۸=۹۷۹$$

پس بزرگ‌ترین عدد سه رقمی ممکن ۹۷۹ بوده که رقم یکان آن ۹ است.

---◈---

بررسی معادله‌ای مهم در پایان این بخش:

معادله‌ی سیاله به فرم کلی $ax+by=c$ است که در آن a، b و c عددهایی صحیح و معلوم هستند. هدف از حل این معادله، تعیین تمام عددهای صحیح x و y صادق در آن است.

نکته ۱۷

شرط جواب:

معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ دارای جواب است، هرگاه عدد c بر ب.م.م. عددهای a و b بخش‌پذیر باشد؛ یعنی: $(a,b)|c$. بویژه:

اگر $(a,b)=۱$ باشد. آنگاه معادله‌ی $ax+by=c$ همواره دارای جواب است.

◈ به‌ازای کدام عدد طبیعی n، معادله‌ی $۲۴x+۳۹y=۲n+۱$ در مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ جواب دارد؟

❶ ۲۹　❷ ۳۳　❸ ۳۷　❹ ۴۱

☑ گزینه ۳

طبق مطلب بالا، شرط وجود جواب این است که $(۲۴,۳۹)|۲n+۱$. چون $۲۴=۲^۳\times ۳$ و $۳۹=۳\times ۳۹$، در نتیجه $(۲۴,۳۹)=۳$ است. بنابراین باید $۳|۲n+۱$ که فقط به ازای $n=۳۷$ برقرار است.

---◈---

◈ به ازای برخی مقادیر طبیعی n، معادله سیاله‌ی $۵۷x+۱۳۳y=۲۲n-۱$ دارای جواب است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد دو رقمی n کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۶　❷ ۵　❸ ۴　❹ ۳

☑ گزینه ۳

با توجه به $۵۷=۳\times ۱۹$ و $۱۳۳=۷\times ۱۹$، داریم: $(۵۷,۱۳۳)=۱۹$ و بنابراین باید:

$$۱۹|۲۲n-۱ \rightarrow ۲۲n\overset{۱۹}{\equiv}۱$$

حل معادله‌ی هم‌نهشتی:

$$\xrightarrow{-۱۹n} ۳n\overset{۱۹}{\equiv}۱ \xrightarrow{-۱۹} ۳n\overset{۱۹}{\equiv}-۱۸ \xrightarrow{\div ۳} n\overset{۱۹}{\equiv}-۶ \Rightarrow n=۱۹k-۶$$

واضح است که باید $k=۱$ قرار گیرد تا $n=۱۹-۶=۱۳$ کوچک‌ترین عدد دو رقمی حاصل شود:

$$۱+۳=۴$$

---◈---

نکته ۱۸

تکنیک حل:

در معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$:

- اگر آن را به صورت $ax-c=-by$ بنویسیم، طبق تعریف هم‌نهشتی می‌توان گفت:

$$ax \overset{|b|}{\equiv} c$$

پس کافی است معادله‌ی همنهشتی $ax \overset{|b|}{\equiv} c$ را حل کرده و جواب کلی را در معادله جای x قرار دهیم.

- با ساده کردن عبارت حاصل، جواب‌های کلی y نیز مشخص می‌شود.

برای نمونه؛

معادله‌ی سیاله‌ی $۱۵x+۱۴y=۱۰۵۰$ را حل می‌کنیم. طبق تکنیک بالا:

$$۱۵x \overset{۱۴}{\equiv} ۱۰۵۰ \xrightarrow{-۱۴x} x \overset{۱۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow x=۱۴k$$

جواب به‌دست آمده را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$۱۵\times ۱۴k+۱۴y=۱۰۵۰ \xrightarrow{\div ۱۴} ۱۵k+y=۷۵ \Rightarrow y=-۱۵k+۷۵$$

توجه کنید:

در اکثر مواقع، بعد از حل معادله‌ی سیاله لازم است جواب‌هایی با شرایط خاص مشخص شوند؛ بویژه:

- اگر جواب‌های طبیعی خواسته شود، قرار می‌دهیم: $x>۰$ و $y>۰$.
- اگر جواب‌های نامنفی خواسته شود، قرار می‌دهیم: $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$.

هر کدام از دو نامساوی، برای k محدوده‌ای مشخص می‌کند که اشتراک آن دو، جواب نهایی است.

به چند طریق می‌توان با ۳۷۰۰ ریال، تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (کنکور ۹۱)

❶ ۳ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۴

گزینه ۲

فرض کنید x و y به ترتیب تعداد تمبرهای ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی را نشان دهد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$۱۵۰x+۲۵۰y=۳۷۰۰ \rightarrow ۱۵x+۲۵y=۳۷۰ \xrightarrow{\div ۵} ۳x+۵y=۷۴$$

مانند قبل، معادله را حل می‌کنیم:

$$۳x \overset{۵}{\equiv} ۷۴ \xrightarrow{-۷۰} ۳x \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{+۵} ۳x \overset{۵}{\equiv} ۹ \xrightarrow{\div ۳} x \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow x=۳+۵k$$

جواب x را در معادله جایگزین کرده و فقط عددها را ساده می‌کنیم:

$$۳\times(۳+۵k)+۵y=۷۴ \rightarrow ۹+۳\times ۵k+۵y=۷۴ \rightarrow ۳\times ۵k+۵y=۶۵$$

$$\xrightarrow{\div ۵} ۳k+y=۱۳ \Rightarrow y=-۳k+۱۳$$

چون تعداد تمبر منفی نیست، باید $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$ باشد:

$$۳+۵k\geq ۰ \rightarrow ۵k\geq -۳ \rightarrow k\geq -\frac{۳}{۵} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳,\ldots$$

$$-۳k+۱۳\geq ۰ \rightarrow -۳k\geq -۱۳ \rightarrow k\leq \frac{۱۳}{۳}\cong ۴/۳ \Rightarrow k=۴,۳,۲,۱,\ldots$$

بنابراین فقط مقادیر (صفر، ۱، ۲، ۳ و ۴) برای k قابل قبول بوده و در کل پنج جفت جواب وجود دارد.

عدد طبیعی n توسط ارقام ۳ و ۷ نوشته شده و مجموع ارقامش ۷۱ است. حداکثر چه تعداد رقم ۳ دارد؟

❶ ۵ ❷ ۱۲ ❸ ۱۴ ❹ ۱۹

گزینه ۴

فرض کنید x و y به ترتیب تعداد رقم‌های ۳ و ۷ را نشان دهند. بنابراین:

$$۳x+۷y=۷۱ \rightarrow ۷y\overset{۳}{\equiv} ۷۱ \xrightarrow{-۶y,\,-۶۹} y\overset{۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow y=۲+۳k$$

پس:

$$۳x+۷(۲+۳k)=۷۱ \rightarrow ۳x+۷\times ۳k=۵۷ \xrightarrow{\div ۳} x=-۷k+۱۹$$

باید $x>۰$ و $y>۰$ باشد:

$$۲+۳k>۰ \rightarrow k>-\frac{۲}{۳} \Rightarrow k=۰,۱,۲,۳,\ldots$$

$$-۷k+۱۹>۰ \rightarrow k<\frac{۱۹}{۷} \Rightarrow k=۲,۱,۰,-۱,\ldots$$

جواب‌های $k=۰,۱,۲$ قابل قبول بوده و هر قدر k کمتر باشد، مقدار x بیشتر خواهد بود:

$$k=۰:\ x=-۷(۰)+۱۹=۱۹$$

عدد ۲۶۴ را به صورت مجموع دو عدد طبیعی نوشته‌ایم که یکی مضرب ۵ و دیگری مضرب ۹ است. بیشترین مقدار برای تفاضل آن دو عدد کدام است؟

❶ ۱۵۶ ❷ ۲۰۴ ❸ ۲۴۶ ❹ ۲۵۸

گزینه ۳

عدد مضرب ۵ را به صورت $۵x$ و عدد مضرب ۹ را به صورت $۹y$ در نظر گرفته و باید معادله‌ی $۵x+۹y=۲۶۴$ را حل کنیم:

$$۹y\overset{۵}{\equiv} ۲۶۴ \xrightarrow{-۱۰y} -y\overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{\times(-۱)} y\overset{۵}{\equiv} -۴ \Rightarrow y=-۴+۵k$$

جایگذاری در معادله:

$$۵x+۹(-۴+۵k)=۲۶۴ \rightarrow ۵x+۹\times ۵k=۳۰۰ \xrightarrow{\div ۵} x=۶۰-۹k$$

بنابراین یکی از دو عدد به صورت $۵x=۵(۶۰-۹k)=۳۰۰-۴۵k$ و عدد دیگر به صورت $۹y=۹(-۴+۵k)=۴۵k-۳۶$ بوده است. تفاضل این دو عدد به صورت $۵x-۹y=۳۳۶-۹۰k$ بوده و واضح است که بیشترین مقدار آن به ازای $k=۱$ به‌دست خواهد آمد:

$$\max\ ۵x-۹y=۳۳۶-۹۰=۲۴۶$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی N بر ۳۱ برابر ۲۶ است. اگر این عدد را بر ۴۳ تقسیم کنیم، باقی‌مانده برابر خارج‌قسمت می‌شود. رقم یکان عدد بزرگ‌تر N کدام است؟ (کنکور ۹۵)

❶ ۷ ❷ ۶ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۳

طبق اطلاعات داده شده می‌نویسیم:

$$N = ۳۱q + ۲۶ \quad و \quad N = ۴۳r + r\,, \quad ۰ < r < ۴۳$$

بنابراین داریم $N = ۴۴r$ و اگر بیشترین مقدار r تعیین شود، بزرگ‌ترین عدد N هم معلوم خواهد شد. با ترکیب دو تساوی:

$$۴۴r = ۳۱q + ۲۶ \rightarrow ۴۴r \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶ \xrightarrow{-۳۱r} ۱۳r \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶ \xrightarrow{\div ۱۳} r \overset{۳۱}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲ + ۳۱k$$

با توجه به شرط $r < ۴۳$، بیشترین مقدار r برابر $۲ + ۳۱(۱) = ۳۳$ است و در نتیجه بیشترین مقدار N حاصل می‌شود:

$$N = ۴۴r \Rightarrow N = ۴۴ \times ۳۳ = ۱۴۵۲$$

---

۴ ویژه صد درصدی‌ها

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برخی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری **درصد ۱۰۰** در آزمون‌ها»

ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید . . .

اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $(10-m)! \overset{36}{\equiv} 36$، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم m^{123} بر ۱۵ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

گزینه ۴

در واقع باید کوچک‌ترین مقدار $10-m$ را مشخص کنیم که:

$$(10-m)! \overset{36}{\equiv} 0 \Rightarrow \text{مضرب ۳۶ باشد.} \ (10-m)!$$

با بررسی ساده‌ای، باید $10-m=6$ بوده و در نتیجه $m=4$ است. پس باقی‌مانده‌ی 4^{123} بر ۱۵ مورد نظر است:

$$4^2 \overset{15}{\equiv} 1 \rightarrow (4^2)^{61} \overset{15}{\equiv} 1 \rightarrow 4^{122} \overset{15}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{123} \overset{15}{\equiv} 4$$

در تقسیم، وقتی مقسوم علیه عددی غیر اول و نسبتاً بزرگ باشد، یک کاربرد مهم از نکته بعدی، تعیین نسبتاً آسان‌تر باقی‌مانده‌ی تقسیم است.

نکته ۱۹

خاصیت ک.م.م:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ باشند، آنگاه a و b به پیمانه‌ی ک.م.م m و n هم همنهشت هستند:

$$a \overset{[n,m]}{\equiv} b$$

حالت ویژه:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ بوده و $(m,n)=1$ باشد، آنگاه $a \overset{mn}{\equiv} b$ است.

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۶۶، کدام است؟ (کنکور ۹۸)

❶ ۲۹ ❷ ۳۲ ❸ ۴۰ ❹ ۴۱

گزینه ۱

داریم: $a \overset{۶}{\equiv} ۵$ و $a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$. باید سمت راست یکسان شود:

$$a \overset{۶}{\equiv} ۵ \to a \overset{۶}{\equiv} ۵+۶\times۴=۲۹ \quad و \quad a \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \to a \overset{۱۱}{\equiv} ۷+۲\times۱۱=۲۹$$

چون $۶۶=[۶,۱۱]$ است، از روابط $a \overset{۶}{\equiv} ۲۹$ و $a \overset{۱۱}{\equiv} ۲۹$ نتیجه می‌گیریم:

$$a \overset{۶۶}{\equiv} ۲۹$$

باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد طبیعی a بر ۱۲ و ۱۵ و ۳۲ به ترتیب برابر ۵ و ۸ و ۲۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد a کدام است؟

❶ ۱۲ ❷ ۱۳ ❸ ۱۴ ❹ ۱۵

گزینه ۴

داریم: $a \overset{۱۲}{\equiv} ۵$، $a \overset{۱۵}{\equiv} ۸$ و $a \overset{۳۲}{\equiv} ۲۵$. مشابه قبل، دو طرف هم‌نهشتی‌ها را یکسان می‌کنیم:

$$a \overset{۱۲}{\equiv} ۵ \xrightarrow{-۱۲} a \overset{۱۲}{\equiv} -۷ \quad و \quad a \overset{۱۵}{\equiv} ۸ \xrightarrow{-۱۵} a \overset{۱۵}{\equiv} -۷ \quad و \quad a \overset{۳۲}{\equiv} ۲۵ \xrightarrow{-۳۲} a \overset{۳۲}{\equiv} -۷$$

تعیین ک.م.م پیمانه‌ها: $۱۲=۲^۲\times۳$، $۱۵=۳\times۵$ و $۳۲=۲^۵$ که می‌دانیم برابر $۲^۵\times۳\times۵=۴۸۰$ است. بنابراین:

$$a \overset{۴۸۰}{\equiv} -۷ \Rightarrow a=-۷+۴۸۰k$$

کوچک‌ترین عدد طبیعی a به ازای $k=۱$ معلوم می‌شود و سپس مجموع ارقام آن به‌دست خواهد آمد:

$$a=-۷+۴۸۰\times۱=۴۷۳ \Rightarrow ۴+۷+۳=۱۴$$

برای چند عدد طبیعی دو رقمی n، تساوی $[(۱۳n-۲,۷),(۵n+۱,۹)]=۶۳$ برقرار است؟

❶ ۰ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

گزینه ۱

واضح است که: ۷ یا $(۱۳n-۲,۷)=۱$ و ۹ یا ۳ یا $(۵n+۱,۹)=۱$ است. چون $۶۳=۷\times۹$ است، باید $(۱۳n-۲,۷)=۷$ و $(۵n+۱,۹)=۹$ بوده و در نتیجه $۷|۱۳n-۲$ و $۹|۵n+۱$. پس:

$$۱۳n \overset{۷}{\equiv} ۲ \xrightarrow{-۱۴n} -n \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow n \overset{۷}{\equiv} -۲ \quad و \quad ۵n \overset{۹}{\equiv} -۱ \xrightarrow{-۹} ۵n \overset{۹}{\equiv} -۱۰ \Rightarrow n \overset{۹}{\equiv} -۲$$

بنابراین باید $n \overset{[۷,۹]}{\equiv} -۲$ باشد. در نتیجه:

$$n \overset{۶۳}{\equiv} -۲ \to n=-۲+۶۳k \xrightarrow{k=۱} n=۶۱$$

به تکنیک حل تست بعد توجه کنید؛ گاهی بسیار مفید واقع می‌شود:

باقیمانده‌ی تقسیم عدد $3^{42}-2^{42}$ بر ۳۵ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۵ ❹ ۶

گزینه ۱

بهتر است هم‌نهشتی عدد $3^{42}-2^{42}$ را یک‌بار با $\overset{5}{\equiv}$ و یک‌بار با $\overset{7}{\equiv}$ تعیین کرده و سپس خاصیت ک.م.م را به کار ببریم:

- **هم‌نهشتی با** $\overset{5}{\equiv}$: طبق رابطه‌ی فرما می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} 3^4 \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow (3^4)^{10} \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow 3^{40} \overset{5}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 3^2} 3^{42} \overset{5}{\equiv} 9 \xrightarrow{-5} 3^{42} \overset{5}{\equiv} 4 \\ 2^4 \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow (2^4)^{10} \overset{5}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{40} \overset{5}{\equiv} 1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{42} \overset{5}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{42}-2^{42} \overset{5}{\equiv} 0$$

- **هم‌نهشتی با** $\overset{7}{\equiv}$: باز هم طبق رابطه‌ی فرما:

$$\left.\begin{array}{l} 3^6 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow (3^6)^7 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow 3^{42} \overset{7}{\equiv} 1 \\ 2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow (2^6)^7 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{42} \overset{7}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3^{42}-2^{42} \overset{7}{\equiv} 0$$

چون $3^{42}-2^{42} \overset{5}{\equiv} 0$ و $3^{42}-2^{42} \overset{7}{\equiv} 0$ و بعلاوه $[5,7]=35$ است، بنابراین طبق خاصیت ک.م.م خواهیم داشت:

$$3^{42}-2^{42} \overset{35}{\equiv} 0$$

اگر عدد 2^n-1 بر ۲۱۷ بخش‌پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۷

گزینه ۳

می‌خواهیم $2^n-1 \overset{217}{\equiv} 0$ یا $2^n \overset{217}{\equiv} 1$ باشد. باید ابتدا کوچک‌ترین جواب n مشخص شود؛ با توجه به $217=7\times31$، تکنیک قبل را به کار می‌بریم:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow (2^3)^5 \overset{7}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{15} \overset{7}{\equiv} 1 \\ 2^5 \overset{31}{\equiv} 1 \rightarrow (2^5)^3 \overset{31}{\equiv} 1 \rightarrow 2^{15} \overset{31}{\equiv} 1 \end{array}\right| \rightarrow 2^{15} \overset{7\times31}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{15} \overset{217}{\equiv} 1$$

در نتیجه $2^{15k} \overset{217}{\equiv} 1$ است که دارای شش جواب دو رقمی است. $(15,30,\ldots,90)$

در مورد عددهای توان‌دار، تعیین رقم یکان روش ویژه و بسیار سریعی دارد:

نکته ۲۰

رقم یکان عدد توان‌دار:

روش سریع یافتن رقم یکان عدد توان‌دار a^n طبق مراحل زیر است:

- رقم یکان a را تعیین می‌کنیم؛ مثلاً $a \overset{10}{\equiv} t$.
- عدد n را بر ۴ تقسیم می‌کنیم: $n = 4k + r$.

آنگاه دو حالت رخ می‌دهد:

- اگر $r = 0$ باشد، آنگاه $a^n \overset{10}{\equiv} t^4$ است؛ یعنی جای n عدد ۴ را قرار می‌دهیم.
- اگر $r = 1, 2, 3$ باشد، آنگاه $a^n \overset{10}{\equiv} t^r$ است؛ یعنی در این صورت، به جای n باقی‌مانده‌ی آن قرار می‌گیرد.

بویژه:

رقم یکان عدد a^m با رقم یکان عدد $a^{m \pm 4k}$ برابر است؛ یعنی:

می‌توانید مضرب‌های ٤ را در توانِ عدد اضافه یا کم کنید.

اگر $a^p = 10k + 7$، آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۱ ❸ ۳ ❹ ۶

گزینه ۱

طبق تساوی داده شده، رقم یکان عدد a^p برابر ۷ است:

$$10k + 7 \overset{10}{\equiv} 7 \rightarrow a^p \overset{10}{\equiv} 7$$

پس با استفاده از نتیجه‌ی قبل، رقم یکان عدد a^{p+4} نیز برابر ۷ خواهد بود!

رقم یکان عدد $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{99}$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۶ ❸ ۸ ❹ ۹

گزینه ۴

اگر در جملات چهارم به بعد، از توان هر عدد مضرب‌های ۴ را کم کنیم، تمام جملات، به جز سه جمله‌ی آخر، الگوهای کاملاً تکراری خواهند بود:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{99} \overset{10}{\equiv} \underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4} + \underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4} + \cdots + \underbrace{3 + 3^2 + 3^3 + 3^4} + 3 + 3^2 + 3^3$$

چون تکرارها تا جمله‌ی 3^{96} بوده است، تعداد تکرارها $96 \div 4 = 24$ مورد بوده و بنابراین خواهیم داشت:

$$۳+۳^۲+۳^۳+\cdots+۳^{۹۹}\overset{۱۰}{\equiv}۲۴\times(۳+۳^۲+۳^۳+۳^۴)+۳+۳^۲+۳^۳\overset{۱۰}{\equiv}۴\times(۳+۹+۷+۱)+۳+۹+۷$$
$$\overset{۱۰}{\equiv}۴\times۲۰+۱۹\overset{۱۰}{\equiv}۴\times۰+۹=۹$$

اگر $A=۲!+۳!+\ldots+۱۳۹۵!$ و $B=۳!+۴!+\ldots+۱۳۹۶!$، رقم یکان $(B-A)^{A+B}$ چقدر است؟

❶ ۶ ❷ ۸ ❸ ۲ ❹ ۴

گزینه ۴

طبق نکته‌ی قبل باید پایه را به پیمانه‌ی ۱۰ و توان را به پیمانه‌ی ۴ در نظر بگیریم:

$$A+B\overset{۴}{\equiv}۲!+۳!+۳!\overset{۴}{\equiv}۱۴\equiv۲ \quad و \quad B-A\overset{۱۰}{\equiv}۱۳۹۶!-۲!\overset{۱۰}{\equiv}۰-۲=-۲$$

توجه کنید:

(عددهای فاکتوریلی از $۴!$ به بعد همواره بر ۴ و از $۵!$ به بعد همواره بر ۱۰ بخش‌پذیر، یعنی با صفر هم‌نهشت هستند!)

اکنون با استفاده از نکته‌ی قبل:

$$(B-A)^{A+B}\overset{۱۰}{\equiv}(-۲)^۲=۴$$

نکته ۲۱

باقی‌مانده تقسیم بر ۷ و ۱۳:

روش محاسبه باقی‌مانده و تعیین بخش‌پذیری به صورت زیر است:

- ارقام را از سمت راست سه‌تا سه‌تا جدا می‌کنیم.
- عددهای سه رقمی حاصل را از راست و یک در میان جمع و تفریق می‌کنیم.

$$\overline{a_n\,a_{n-1}\ldots a_۲\,a_۱\,a_۰}\overset{۷ \text{ یا } ۱۳}{\equiv}\overline{a_۲a_۱a_۰}-\overline{a_۵a_۴a_۳}+\overline{a_۸a_۷a_۶}-\cdots$$

- عدد سمت راست با باقی‌مانده هم‌نهشت است.

برای نمونه:

باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۱۷۳۰۲۳۳۹ بر ۱۳ برابر ۲ است، زیرا:

$$۳۳۹-۳۰۲+۱۷=۵۴ \;\to\; ۵۴\overset{۱۳}{\equiv}۲$$

عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ ممکن است مضرب کدام عدد نباشد؟

❶ ۷ ❷ ۱۳ ❸ ۳۷ ❹ ۳۱

گزینه ۴

عدد شش رقمی داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{ababab}=\overline{ab}+۱۰۰\times\overline{ab}+۱۰۰۰۰\times\overline{ab}=۱۰۱۰۱\times\overline{ab}$$

طبق قاعده‌ی قبل، عدد ۱۰۱۰۱ هم بر ۷ بخش‌پذیر است و هم بر ۱۳، زیرا:

$$10101 \overset{۷ \text{ یا } ۱۳}{\equiv} 101-10=91=7\times 13 \equiv 0$$

پس عدد $\overline{ababab}$ بر ۷ و ۱۳ بخش‌پذیر بوده و گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند. بعلاوه، با تقسیم می‌بینیم که عدد ۱۰۱۰۱ بر ۳۷ نیز بخش‌پذیر است. پس عدد شش رقمی اولیه هم بر ۳۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

TEST تمرین تست

۱ – اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد فرد a بر ۲ و ۴ و ۸ یکسان باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $a^۲+۶$ بر ۲ و ۴ و ۸ به‌ترتیب کدام است؟

❶ ۱ و ۱ و ۱ ❷ ۱ و ۳ و ۷
❸ ۱ و ۳ و ۵ ❹ ۰ و ۰ و ۰

۲ – اگر معادله‌ی سیاله‌ی $(۲m+۳)x+(m+۶)y=۱۲$ دارای جواب نباشد، m کدام می‌تواند باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۳ – عدد $\overline{۱ab۵۶۲}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۲۲ کدام است؟

❶ ۶۲ ❷ ۰ ❸ ۷۴ ❹ ۱۲۰

۴ – اگر عدد $\overline{۳۴x۵y}$ مضرب ۳۶ باشد، x کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

❶ ۶ ❷ ۹ ❸ ۰ ❹ ۴

۵ – چند عدد دو رقمی وجود دارد که از پنج برابر مجموع ارقام خود ۱۷ واحد بزرگ‌تر باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۶ – اگر عدد $۲x+۳$ در پیمانه‌ی ۱۹ متعلق به کلاس $[۸]$ باشد، x کدام است؟

❶ $۱۹k+۴$ ❷ $۱۹k+۳$ ❸ $۱۹k+۱۲$ ❹ $۱۹k-۲$

۷ – چند عدد طبیعی سه رقمی در معادله‌ی $۱۵x \overset{۱۳}{\equiv} ۲$ صدق می‌کنند؟

❶ ۳۸ ❷ ۱۸ ❸ ۷۱ ❹ ۶۹

۸ – روی منحنی (بیضی) به معادله‌ی $۵x^۲+۹y^۲=۱۳۷۵$ چند نقطه با مختصات صحیح وجود دارد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۰

۹ – بزرگ‌ترین رقم یکان برای عدد $۲^{n+۵}+۳^{n+۵}$ به‌ازای مقادیر مختلف طبیعی n کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۹ ❸ ۳ ❹ ۵

۱۰ – باقی‌مانده‌ی تقسیم $\sum_{n=۱}^{۱۰۰} n!=۱!+۲!+\cdots+۱۰۰!$ بر ۱۲ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۹ ❸ ۱۴ ❹ ۲

۱۱ – چند عدد به صورت $\overline{۳ba۱۵۲}$ بر ۳۶ بخش‌پذیر است؟

❶ ۷ ❷ ۹ ❸ ۱۱ ❹ ۱۸

۱۲– از رابطه‌ی هم‌نهشتی $۱۲a \overset{۹}{\equiv} ۱۸b$ کدام نتیجه‌گیری به پیمانه‌ی ۳ نادرست است؟

❶ $۲a\equiv ۳b$ ❷ $۴a\equiv ۶b$ ❸ $a\equiv ۰$ ❹ $b\equiv ۲$

۱۳– اگر دو عدد $\overline{۷a۴}$ و $\overline{۵۵b}$ در یک دسته هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۹ باشند، عدد $\overline{۳a۵۲b}$ به کدام دسته‌ی هم‌نهشتی در پیمانه‌ی ۱۱ می‌تواند متعلق باشد؟

❶ [۱] ❷ [۳] ❸ [۵] ❹ [۷]

۱۴– اگر $۳a \overset{۱۱}{\equiv} ۷$ و $۵a \overset{۱۱}{\equiv} ۲b$، آنگاه باقی مانده‌ی تقسیم b بر ۱۱ کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۴ ❸ ۳ ❹ ۶

۱۵– عدد $۷^{۱۷}+a$ بر عدد ۵۷ تقسیم‌پذیر است. کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۸ ❸ ۱ ❹ ۵

۱۶– در رابطه‌ی $۹a \overset{۲۰}{\equiv} ۳۶-۳a$ عدد a به کدام صورت است؟

❶ $۵k+۳$ ❷ $۵k+۱$ ❸ $۴k+۳$ ❹ $۴k+۱$

۱۷– اگر $۷|۳a+۵b$، باقی مانده‌ی تقسیم $۱۷a+۴۷b$ بر ۷ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۱۸– اگر $۵x+۴y=۳$، مقدار $x-y$ در $\mathbb{Z}$ به کدام صورت است؟

❶ $۳k+۱$ ❷ $۳k-۱$ ❸ $۹k-۳$ ❹ $۹k+۱$

۱۹– اگر (پیمانه m) $a^{۳}-a^{۲}-a+۱\equiv a^{۲}-۱$ و $(m,a^{۲}-۱)=۱$، آنگاه:

❶ $m|a-۲$ ❷ $m|a-۱$ ❸ $m|a+۱$ ❹ $m|a+۲$

۲۰– دو عدد ۲۴ و ۱۸۵ در یک دسته هم‌ارزی به پیمانه m هم‌نهشت شده‌اند. اگر $(m,۷)=۱$، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد m^{m} بر ۷ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۲۱– اگر عدد $۷^{۲۰۰}+a$ مضرب ۱۹ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

❶ ۸ ❷ ۴ ❸ ۵ ❹ ۶

۲۲– باقیمانده‌ی تقسیم عدد $(-۶)^{۲۳}$ بر عدد ۳۳ کدام است؟

❶ ۱۸ ❷ ۱۵ ❸ ۱۵− ❹ ۱۸−

۲۳– مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی x که در معادله‌ی $۵۷x-۸۷y=۳۴۲$ صدق کند، کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۸ ❸ ۶ ❹ ۵

۲۴– اگر رقم یکان دو عدد $۴a-۵$ و $۵a+۳$ یکسان باشد، رقم یکان $(۲a-۱)^{۱۰۰}$ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۹ ❸ ۳ ❹ ۱

۲۵– عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ مربع کامل است. باقیمانده‌ی تقسیم عدد دو رقمی $\overline{ab}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟ (کنکور ۹۲)

❶ ۱۲ ❷ ۹ ❸ ۱۱ ❹ ۱۰

۲۶– به ازای چند عدد طبیعی n کوچک‌تر از ۵۰، عدد $۷^n+۴۲$ بر ۴۳ بخش‌پذیر است؟ (کنکور ۹۲)

❶ ۷ ❷ ۹ ❸ ۸ ❹ ۶

۲۷– چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقی مانده‌ی تقسیم‌های آن بر دو عدد ۴ و ۵ برابر ۱ باشد؟ (کنکور ۹۴)

❶ ۶ ❷ ۵ ❸ ۴ ❹ ۳

۲۸– اگر $(۲۲۱,۳۵۷)=۲۲۱x+۳۵۷y$ باشد، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی x کدام است؟ (کنکور ۹۵)

❶ ۷ ❷ ۵ ❸ ۴ ❹ ۶

۲۹– در معادله‌ی سیاله‌ی $۹x+۱۳y=۷$، مقدار y در کدام دسته‌ی هم‌نهشتی قرار دارد؟

❶ $[۴]_۹$ ❷ $[۵]_۹$ ❸ $[۶]_۹$ ❹ $[۳]_۹$

۳۰– معادله‌ی $(۱!+۲!+\cdots+۱۳۹۱!)x\overset{۱۲}{\equiv}۳$ چند جواب در مجموعه اعداد دو رقمی دارد؟

❶ ۲۲ ❷ ۲۳ ❸ ۲۴ ❹ ۲۵

۳۱– به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی a، عدد $۳^{۱۰۰}+a$ به دسته‌ی هم‌نهشتی $[۰]_{۱۱}$ تعلق دارد؟

❶ ۷ ❷ ۸ ❸ ۹ ❹ ۱۰

۳۲– اگر ۲۲ بهمن در یک سال شنبه باشد، ۱۵ خرداد ماه در همین سال چه روزی از هفته است؟

❶ جمعه ❷ شنبه ❸ یک‌شنبه ❹ دوشنبه

۳۳– از رابطه‌ی $۱۸a\overset{۴۵}{\equiv}۳۰b$، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

❶ $۵|a$ ❷ $۳|b$ ❸ $۶a\overset{۱۵}{\equiv}۵b$ ❹ $۳a\overset{۱۵}{\equiv}۸b$

۳۴– اگر عدد طبیعی پنج رقمی $\overline{a11a}$ مضرب ۱۱ باشد، آنگاه چند عدد طبیعی چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۹ به صورت $\overline{babb}$ وجود دارد؟

❶ هیچ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۳۵– اگر دو رقم سمت راست اعداد $50a+8$ و $180a-162$ با هم برابر باشند، آنگاه رقم یکان عدد $2a-1$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۳ ❸ ۷ ❹ ۹

۳۶– عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ مجذور عدد دو رقمی $\overline{cc}$ است. $a-b$ کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۵ ❷ ۴ ❸ ۳ ❹ ۲

۳۷– چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن اعداد بر ۴۳۰ با مجذور خارج قسمت برابر باشد؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۷

۳۸– قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا، خریداری کرد؟ (کنکور ۹۸)

❶ ۱۰ ❷ ۱۱ ❸ ۱۲ ❹ ۱۳

۳۹– اگر x و y هر دو عدد طبیعی باشند، معادله‌ی سیاله خطی $12x+11y=759$ چند جواب دارد؟ (کنکور ۱٤۰۱)

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۶ ❹ ۵

۴۰– برای چند عدد طبیعی دو رقمی n، معادله‌ی سیاله‌ی $(5n-1)x+(3n+2)y=15$ دارای جواب است؟

❶ ۸۶ ❷ ۸۵ ❸ ۸۴ ❹ ۸۳

۴۱– مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد سه رقمی x که در معادله‌ی هم‌نهشتی $\sum_{m=0}^{1402}(2m)!x \overset{8}{\equiv} 1402$ صدق می‌کند، کدام است؟

❶ ۲۴ ❷ ۲۵ ❸ ۲۶ ❹ ۲۷

۴۲– معادله‌ی هم‌نهشتی $(n+30)x \overset{2n-7}{\equiv} 2a+1$ دارای جواب بوده و ضریب x و پیمانه نسبت به هم اول نیستند. چند عدد سه رقمی برای a وجود دارد؟

❶ ۱۴ ❷ ۱۲ ❸ ۱۶ ❹ ۱۰

۴۳– هرگاه $2x+7$ و $11x+5$ در یک دسته‌ی هم‌ارزی به پیمانه‌ی ۷ قرار داشته باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم x^3-1 بر ۷ کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

100%

ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱- اگر $۱۴a+۱۵b=۱$ باشد، آنگاه کدام نادرست است؟

❶ $۳|a^۲-۱$ ❷ $۵|a^۴-۱$ ❸ $(۱۴,b)=۱$ ❹ $۳|a^۲+۱$

۲- خارج قسمت تقسیم عدد $۱۳!-۱$ بر ۱۳ کدام است؟

❶ $۱۳!-۱۱$ ❷ $۱۲!-۱$ ❸ $۱۲!+۱$ ❹ $۱۲!$

۳- اگر $۲۰۱۸^{۲۰۱۹}+۱۳۹۸^{۱۳۹۷}+c$ مضرب ۱۱ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی c کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۹ ❸ ۳ ❹ ۱

۴- باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $\overline{۱۳a۷۹}$ بر ۹۹ کدام می‌تواند باشد؟

❶ ۷ ❷ ۳۷ ❸ ۲۷ ❹ ۱۷

۵- چند عدد پنج رقمی به شکل $\overline{ab۰ab}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر است؟

❶ ۹ ❷ ۱۰ ❸ ۱۸ ❹ ۱۷

۶- به ازای کدام مقدار n، معادله‌ی سیاله‌ی $(۲m^۲+۱)x+(۲m-۴)y=n$ همواره دارای جواب است؟

❶ ۴۹ ❷ ۵۴ ❸ ۷۵ ❹ ۶۶

۷- معادله‌ی $۵x+۱۰y+n=n^۳$، به ازای چند مقدار n از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ در $\mathbb{Z}$ دارای جواب است؟

❶ ۶۰ ❷ ۵۰ ❸ ۴۰ ❹ ۳۰

۸- اگر $a^۲-۳a+۲\overset{۶}{\equiv}۰$، آنگاه a به چه تعداد از دسته‌های هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۶ می‌تواند تعلق داشته باشد؟

❶ ۲ ❷ ۳ ❸ ۴ ❹ ۵

۹- اگر روز اول فروردین شنبه باشد، دومین جمعه در مهرماه، کدام روز این ماه است؟

❶ دهم ❷ یازدهم ❸ دوازدهم ❹ سیزدهم

۱۰- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دو رقمی x که در معادله‌ی هم‌نهشتی $x^۳+x+۲\overset{۶}{\equiv}۰$ صدق می‌کند، کدام است؟

❶ ۱۴ ❷ ۱۵ ❸ ۱۶ ❹ ۱۷

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴