The Best TEACHER

ترکیب: دانش شما + محتوای بی‌نظیر تدریس ما

درسنامه آپدیت

تمرین و پاسخنامه

کوییز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»

تدریس ریاضیات

چند نمونه از نتایج درخشان برخی از همکاران مجموعه درس‌آموز: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ‌کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱٤۰٤)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱٤۰۲)

تدریس ریاضیات کنکور:

از متوسط تا پیشرفته و بسیار پیشرفته 100%

با ترکیب دانش خود و محتوای آموزشی ما، آسان، روان و مؤثر تدریس کنید!

(اختصاصی دبیران، مدرسان و اساتید)

درسنامه کنکوری

- بیان دقیق و کامل مفاهیم ضروری
- نکات لازم و سرعتی
- بیان نمونه‌ها از ساده به دشوار جهت تفهیم

+

درسنامه ویژه شاگردان نخبه (۱۰۰ درصدی)
در انتهای هر مبحث

تنوع نمونه تست

تست‌های تألیفی، تست‌های جدیدترین کنکورها و معتبرترین آزمون‌ها با ترتیب مناسب آماده بررسی است.

تمرین تست

تعداد قابل توجهی تست تمرینی متوسط، دشوار و دشوارتر که به شاگردان واگذار کنید. (پاسخ‌نامه تشریحی تحویل می‌شود.)

جزوات شخصی شما
برای تدریس حرفه‌ای ریاضیات کنکور

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و . . . روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.

TEST

فهرست

کنکور
هندسه سه

TEST

۱

ماتریس (۱)

۱ مفاهیم پایه

معرفی مفاهیم آغازین مبحث ماتریس در این بخش انجام می‌شود.

ماتـــریس:

تعدادی عدد یا حرف در یک آرایش سطری و ستونی، یک «**ماتریس**» تشکیل داده و هر یک از آن اعداد، یک «**درایه**» هستند.

$$A=\begin{array}{c} \\ \left[\begin{matrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix}\text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم}\end{matrix}\end{array}\begin{matrix} \\ \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \\ \\ \end{matrix}$$

ماتریس بالا دارای ۲ سطر و ۳ ستون و از «مرتبه‌ی ۲×۳» است.

بعلاوه:

درایه‌ی واقع در سطر iام و ستون jام ماتریس A را با $a_{i,j}$ یا (معمولاً: a_{ij}) نشان داده و نمایش کلی یک ماتریس از مرتبه‌ی $m\times n$ به صورت زیر است:

$$A_{m\times n}=[a_{i,j}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} a_{۱,۱} & a_{۱,۲} & \cdots & a_{۱,n} \\ a_{۲,۱} & a_{۲,۲} & \cdots & a_{۲,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,۱} & a_{m,۲} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

حالت خاص:

ماتریس با فقط یک درایه را با تنها عدد داخل آن برابر می‌گیریم: $[a]_{۱\times۱}=a$

در ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times۳}$ به صورت $b_{ij}=\begin{cases} ۳i-۲ & i<j \\ -i^۲+۲j & i\geq j \end{cases}$، مجموع درایه‌ها کدام است؟

❶ -۲ ❷ صفر ❸ ۳ ❹ ۵

پاسخ

ماتریس مربعی:

ماتریس «**مربعی**» از مرتبه‌ی n دارای تعداد برابرِ n سطر و ستون است.

ببینید:

ماتریس مربعی مرتبه ۲ : $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۵ & ۴ \end{bmatrix}$ ماتریس غیرمربعی: $B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۴ & ۰ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}$

بعلاوه:

- در ماتریس مربعی، درایه‌های با شماره‌ی سطر و ستون یکسان، «**قطر اصلی**» را تشکیل می‌دهند. قطر دیگر ماتریس، قطر فرعی آن است. (شماره‌های سطر و ستون روی قطر فرعی چه ارتباطی با هم دارند؟)
- ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند، «**ماتریس قطری**» نام دارد.
- در یک ماتریس قطری، اگر تمام درایه‌های قطر اصلی یکسان باشند، به آن «**ماتریس اسکالر**» گویند.
- اگر تمام درایه‌های قطر اصلی ماتریس اسکالر برابر یک باشند، به آن ماتریس «**همانی**» یا «**واحد**» گفته می‌شود. ماتریس همانی مرتبه‌ی n را با I_n نشان می‌دهیم.

نمونه‌ها:

ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$

قطر فرعی

$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۲ \\ ۵ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

قطر اصلی

ماتریس اسکالر: $B=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix}$ ماتریس همانی: $I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $I_۲=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

همچنین ببینید:

درایه‌های بالای قطر اصلی

$\begin{bmatrix} -۲ & ۱ & -۲ \\ ۵ & ۱ & ۳ \\ ۴ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$

درایه‌های پایین قطر اصلی

مجموع درایه‌های یک ماتریس اسکالر ۳×۳، برابر ۱ است. حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی این ماتریس کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۸}$ ❷ ۸ ❸ ۲۷ ❹ $\frac{۱}{۲۷}$

پاسخ

در ماتریس مربعی E از مرتبه‌ی ۳، درایه‌ی سطر a و ستون b از رابطه‌ی b^a به‌دست می‌آید. اختلاف مجموع درایه‌های دو قطر آن کدام است؟

❶ ۸ ❷ ۳۲ ❸ ۱۲ ❹ ۲۴

پاسخ

نکته ۱

تساوی ماتریس‌ها:

دو ماتریس A و B «**هم‌مرتبه**» هستند، هرگاه تعداد سطرها و تعداد ستون‌های آن‌ها برابر باشند. بعلاوه؛ این دو ماتریس برابرند و می‌نویسیم: $A=B$، هرگاه:

- **اولاً:** هم‌مرتبه باشند و
- **ثانیاً:** درایه‌های نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

برای نمونه؛

از تساوی $\begin{bmatrix} ۴q & ۹p \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ m^۳ & ۲n^۲ \end{bmatrix}$، مقدار $m-۲n+۳p-۴q$ را حساب می‌کنیم؛ باید درایه‌های متناظر برابر قرار گیرند:

$$-۳=۴q \Rightarrow q=-\frac{۳}{۴} \qquad ۳=۹p \Rightarrow p=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

$$m^۳=۱ \Rightarrow m=۱ \qquad ۲n^۲=۲ \rightarrow n^۲=۱ \Rightarrow n=\pm ۱$$

در نتیجه، برای عبارت داده شده دو جواب وجود دارد؛ یکی در حالت $n=۱$ و دیگری در حالت $n=-۱$:

- $n=۱: \quad m-۲n+۳p-۴q=۱-۲(۱)+۳(\frac{۱}{۳})-۴(-\frac{۳}{۴})=۱-۲+۱+۳=۳$
- $n=-۱: \quad m-۲n+۳p-۴q=۱-۲(-۱)+۳(\frac{۱}{۳})-۴(-\frac{۳}{۴})=۱+۲+۱+۳=۷$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ & m \\ ۸ & n-۱ & ۴ \\ k+۱ & ۹ & ۶ \end{bmatrix}$، $B=[i+ij]_{۳\times۳}$ و $A=B$ باشد، آنگاه حاصل $m+n+k$ کدام است؟

❶ ۶　　❷ ۲۰　　❸ ۱۶　　❹ ۲۵

پاسخ

ماتریس صفر:

نماد آن $\overline{O}$ است و تمام درایه‌های آن صفر هستند.

ماتریس صفر ۳×۲ $\overline{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ماتریس صفر ۲×۲ $\overline{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

واضح است که ماتریس صفر از هر مرتبه‌ای وجود دارد و بنابراین:

بی‌شمار ماتریس صفر (و همچنین: ماتریس همانی) گوناگون وجود دارد.

۲ جمع ماتریس‌ها

بررسی عمل‌هایی کاملاً مشابه عددها برای ماتریس‌ها در ادامه.

نکته ۲

جمع و تفریق:

جمع و تفریق دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A=[a_{i,j}]_{m\times n}$ و $B=[b_{i,j}]_{m\times n}$، با استفاده از درایه‌های متناظر در A و B انجام می‌شود:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \quad \text{و} \quad A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

توجه کنید:

- اگر دو ماتریس هم‌مرتبه نباشند، جمع یا تفریق آن‌ها انجام نمی‌شود.
- مرتبه‌ی $A\pm B$ در صورت تعریف شدن، همان مرتبه‌ی A و B است.

برای نمونه؛

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱-۱ & ۰-۲ & ۴+۱ \\ ۲-۰ & ۵-۳ & ۹+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ & ۵ \\ ۲ & ۲ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

یک عدد را می‌توان در هر ماتریسی ضرب کرد:

نکته ۳

ضرب عددی:

اگر $A=[a_{i,j}]_{m\times n}$ یک ماتریس و r عددی دلخواه باشد، ماتریس rA ماتریسی هم‌مرتبه‌ی A است که از ضرب عدد r در تمام درایه‌های ماتریس A به‌دست می‌آید: $rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$. برای نمونه؛

$$-۲\times\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۲ & ۰ \\ -۸ & -۱۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

نام دیگر این نوع ضرب، «**ضرب اسکالر**» است.

بویژه:

۱) حاصل ضرب $A(-۱)$ که در آن تمام درایه‌ها، قرینه‌ی درایه‌های نظیر در ماتریس A هستند را با $-A$ نشان داده و به آن «**قرینه‌ی**» ماتریس A گفته می‌شود. بعلاوه:

۲) هر ماتریس اسکالر به صورت cI قابل نوشتن است که c درایه‌ی ثابت روی قطر اصلی آن است. مانند:

$$\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} = -۲I_۳$$

خاصیت ماتریس قرینه:

حاصل جمع هر ماتریس با قرینه‌ی خود، ماتریس صفر است:

$$\boxed{A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}}$$

برای نمونه؛

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس X را از معادله‌ی $۳A+\frac{X}{۲}=۲B$ مشخص می‌کنیم:

$$۳A+\frac{X}{۲}=۲B \rightarrow \frac{X}{۲}=۲B-۳A \xrightarrow{\times ۲} X=۴B-۶A$$

$$\rightarrow X=۴\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}-۶\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & ۳ & -۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۴-۶ & ۰-۱۲ & ۱۶+۶ \\ ۸-۰ & ۲۰-۱۸ & ۳۶+۱۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix} -۱۰ & -۱۲ & ۲۲ \\ ۸ & ۲ & ۴۸ \end{bmatrix}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۴ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۶ & -۳ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & -۳ \end{bmatrix}$، آنگاه در ماتریس $I-۳A+۲B$ کدام توصیف درست است؟

❶ درایه‌های زیر قطر اصلی همگی صفرند.

❷ ماتریس قطری است.

❸ درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفرند.

❹ ماتریس صفر است.

پاسخ

A یک ماتریس اسکالر ۳×۳ است به طوری که $۲A=۳B=-\frac{۱}{۲}C$. اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A+B+C$ برابر -۷ باشد، ماتریس A کدام است؟

❶ I

❷ $۲I$

❸ $\frac{۲}{۳}I$

❹ $-\frac{۷}{۳}I$

پاسخ

موارد زیر به آسانی از ویژگی‌های عددهای معمولی نتیجه می‌شوند:

نکته ۴

ویژگی‌های جمع و تفریق:

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند:

- همواره $A+B=B+A$ است، یعنی جمع ماتریس‌ها جابجایی است؛ ولی: $A-B \neq B-A$.
- اگر $\overline{O}$ ماتریس صفر هم‌مرتبه‌ی A باشد، آنگاه: $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$.
- خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

همچنین:

نکته ۵

ویژگی‌های ضرب عددی:

موارد زیر به آسانی از تعریف این نوع ضرب حاصل می‌شوند:

- $0A=\overline{O}$، $r\overline{O}=\overline{O}$ و $1A=A$.
- اگر r یک عدد و A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند:

$$r(A+B)=rA+rB$$

- اگر r و s دو عدد دلخواه باشند:

$$(r+s)A=rA+sA$$

(به تفاوت در نمادهای: عدد صفر ۰ و ماتریس صفر $\overline{O}$، توجه داشته باشید.)

۳ ضرب ماتریس‌ها

انجام ضرب ماتریس‌ها را در سه گام بیان می‌کنیم: **(مهم)**

نکته ۶

گام اول:

ضرب یک سطر در یک ستون (**با شرط:** تعداد درایه‌های برابر) به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

برای نمونه؛

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = (۲)(۱) + (-۱)(-۲) + (۳)(-۳) = ۲ + ۲ - ۹ = -۵$$

توجه کنید:

حاصل ضرب یک سطر در یک ستون، در واقع یک ماتریس از مرتبه‌ی ۱×۱ است.

نکته ۷

گام دوم:

ضرب یک سطر در یک ماتریس، به‌ترتیب از ضرب آن سطر در تمام ستون‌های ماتریس دوم به‌دست می‌آید.

بعلاوه:

جواب‌های حاصل شده به ترتیب، در یک ماتریس سطری قرار می‌گیرند.

برای نمونه؛

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = [(۲)(۱) + (-۱)(-۲) + (۳)(-۳) \quad (۲)(۰) + (-۱)(۳) + (۳)(۲)] = [-۵ \quad ۳]$$

واضح است که باید:

تعداد درایه‌های ماتریس سمت چپ برابر تعداد درایه‌های هر ستون ماتریس سمت راست باشد. (بیان دقیق کمی پیش‌تر!)

گام سوم، حالت کلیِ ضرب دو ماتریس است:

نکته ۸

گام سوم:

در حالت کلی، ضرب ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ در $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، از ضرب هر یک از سطرهای ماتریس اول در هر یک از ستون‌های ماتریس دوم به‌دست می‌آید. به‌عبارت دقیق‌تر:

اگر $C=AB$، آنگاه درایه‌ی c_{ij} از ماتریس C عبارت است از:

$c_{ij}=A$ سطر i ام $\times$ B ستون j ام

این ضرب با نماد ریاضی چنین بیان می‌شود:

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n}a_{i,k}\,b_{k,j}=a_{i,۱}\,b_{۱,j}+a_{i,۲}\,b_{۲,j}+a_{i,۳}\,b_{۳,j}+\cdots+a_{i,n}\,b_{n,j}$$

شرط انجام ضرب:

شرط آن‌که ضرب AB انجام شود این است که:

تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد.

بعلاوه:

ماتریس حاصل، یعنی AB، تعداد سطرها را از A و تعداد ستون‌ها را از B می‌گیرد:

$$\boxed{A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}}$$

برای نمونه؛

در ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۳\\ ۱ & ۱ & ۴\\ ۵ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۵ & ۹\end{bmatrix}$، ضرب BA قابل انجام بوده ولی AB وجود ندارد. اگر BA را C بنامیم، این ماتریس از مرتبه‌ی ۲×۳ است:

$$C=B_{۲\times۳}\times A_{۳\times۳}\;\Rightarrow\;C_{۲\times۳}$$

بعلاوه، درایه‌ی $c_{۲,۱}$ با ضرب سطر دوم ماتریس B در ستون اول ماتریس A محاسبه می‌شود:

$$c_{۲,۱}=\begin{bmatrix}۲ & ۵ & ۹\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ ۵\end{bmatrix}=۲\times۲+۵\times۱+۹\times۵=۵۴$$

برای $A=\begin{bmatrix}۲ & a-b\\ -۳ & ۲b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$، در بین ماتریس‌های AB و BA، فقط یکی قطری است. اختلاف درایه‌های قطر اصلی در ماتریس غیر قطری کدام است؟

❶ ۳ ❷ ۶ ❸ ۱۲ ❹ ۹

توجه فرمایید:

پاسخ

اگر $\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ d & e & f \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $a+b+e$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ

از رابطه‌ی ماتریسی $[x \quad ۲x \quad -۱]\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$، عدد غیرصفر x کدام است؟ **(کنکور ۹۸)**

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

پاسخ

اگر $A = \begin{bmatrix} x & -۱ & -x \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ y & z & z \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۲z & \frac{۱}{۲} & ۲ \\ ۲z & ۰ & -۴y \\ ۰ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y \in \mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟ **(کنکور ۱۴۰۱)**

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) -۱

پاسخ

مورد بعد در ضرب سه ماتریس مفید است:

نکته ۸

فرض کنید در ضرب ABC، یک درایه‌ی دلخواه خواسته شود؛ در این صورت:

لازم نیست ضرب AB یا BC به صورت کامل انجام شود!

بلکه کافی است به صورت زیر عمل کنید:

ABC درایه‌ی ijـ اُم ماتریس $=$ سطر i اُم $A \times B \times$ ستون j اُم C

فرض کنید $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ & ۸ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۵ \\ ۶ & ۹ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A کدام است؟

(کنکور ۱٤۰۰)

❶ ۳ ❷ ۵ ❸ ۱۲ ❹ ۱۳

پاسخ

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & a \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۶ & ۱ \\ ۱ & b & -۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر در ماتریس AB، درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند، مقدار $a+b$ کدام است؟

❶ -۸ ❷ -۴ ❸ ۴ ❹ ۸

پاسخ

نکته ۹

ویژگی‌های ضرب:

به‌شرط آن که ضرب‌ها قابل انجام باشند، موارد زیر را داریم:

- $A \times B$ و $B \times A$ ممکن است برابر نباشند؛ یعنی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.
- $AI = IA = A$ و $A\overline{O} = \overline{O}A = \overline{O}$.
- $A(B+C) = AB + AC$ و $A(B-C) = AB - AC$. یعنی ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است.
- خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب برقرار است؛ یعنی اگر ضرب‌های زیر ممکن باشند، تساوی برقرار است:

$$(AB)C = A(BC)$$

توجه کنید:

شکل عمومی‌تر خاصیت ضربی ماتریس همانی در ماتریس A از مرتبه‌ی $m \times n$ چنین است:

$$I_m A = A \quad \text{و} \quad AI_n = A$$

بعلاوه:

موارد زیر، به مهم‌ترین خواصی که در ماتریس‌ها برقرار نیستند، اشاره دارند:

- اگر $AB = \overline{O}$ باشد، آنگاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$. یعنی ممکن است ضرب دو ماتریس غیرصفر، برابر صفر شود.
- قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست. یعنی از تساوی $AB = AC$، حتی با شرط $A \neq \overline{O}$، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$.
- چنان که گفته شد، **ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد.**
  یعنی اگر ضرب‌های AB و BA انجام شوند، آنگاه:
  ممکن است تساوی $AB = BA$ برقرار باشد یا برقرار نباشد. **(فقط گاهی برقرار است.)**

اگر $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و A دو ماتریس با این خاصیت باشند که ضربشان جابجایی است، آنگاه مجموع درایه‌های قطر فرعی A کدام است؟

❶ جواب‌های گوناگون دارد. ❷ ۱ ❸ ۱− ❹ ۰

پاسخ

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه دو و $AB=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی مـاتریس $A\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}B-\frac{۳}{۲}A\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۴ & \frac{۴}{۳} \end{bmatrix}B$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۹ ❷ -۹ ❸ -۳ ❹ ۳

پاسخ

نکته ۱۰

توان‌رسانی ماتریس:

ضرب یک ماتریس A در خودش فقط وقتی امکان دارد که آن ماتریسی مربعی باشد. در این صورت:

«ماتریس $A\times A$ را با $A^۲$ نشان می‌دهیم.»

با ادامه‌ی این روند، توان‌های بزرگ‌تر ماتریس معلوم می‌شوند:

$$A^۲\times A=A^۳\ ,\quad A^۳\times A=A^۴\ ,\ \dots\ ,\ A^n\times A=A^{n+۱}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} x & ۲ \\ a & -۱ \end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A^۲=A$، آنگاه مقدار ax کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۲ ❸ -۲ ❹ -۴

پاسخ

اگر A ماتریس مربعی مرتبه‌ی n و $B=I_n-A$ باشد، ماتریس $A^۲+AB+B$ همواره برابر کدام است؟

❶ B ❷ A ❸ AB ❹ I_n

پاسخ

اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس $A^۳$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ $[-10 \quad 1 \quad 5]$ ❷ $[-10 \quad 1 \quad 7]$
❸ $[7 \quad 5 \quad -5]$ ❹ $[7 \quad 5 \quad -2]$

پاسخ

توجه کنید: (مهم)

در حالت کلی اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نیستند و باید ضرب‌های مربوطه انجام شوند.

برای نمونه؛

عبارت $(A+B)^2$ باید به صورت زیر محاسبه شود:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

اما حالت بسیار مهمی وجود دارد:

نکته ۱۱

استفاده از اتحادها در ماتریس:

در صورتی که ماتریس‌های مربعی A و B طوری داده شوند که $AB = BA$ باشد، آنگاه تمام اتحادها در مورد این دو ماتریس برقرار خواهند بود. (و برعکس)

بویژه:

چون $AI = IA = A$، بنابراین تمام اتحادها در مورد دو ماتریس هم مرتبه‌ی A و I برقرار خواهند بود:

$$(A+I)^2 = A^2 + 2AI + I^2 = A^2 + 2A + I$$

ماتریس A چنان داده شده که $A^2 = \overline{O}$ است. حاصل $A(I-A)^2$ کدام است؟

❶ I ❷ A^3 ❸ A^2 ❹ A

پاسخ

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^2 + AB + BA + B^2$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

پاسخ

اگر $A^۲ = \begin{bmatrix} ۱۸ & ۸ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ، $B^۲ = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ و $A-B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $AB+BA$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱۵ & ۱۲ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۱۲ & -۱ \\ ۱۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲۱ & -۶ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} -۶ & ۱ \\ ۲۱ & ۳ \end{bmatrix}$

پاسخ

اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & a \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} b & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $(A-B)(A+B) = A^۲ - BA - B^۲$ باشد، مقدار $b+۲a$ کدام است؟

❶ ۹ ❷ ۳ ❸ -۳ ❹ ۰

پاسخ

۴ ویژه صد درصدی‌ها

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برخی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری ۱۰۰ درصد در آزمون‌ها»

ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید . . .

اگر A و B ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی دو بوده و $AB=\begin{bmatrix} r-1 & 1 \\ s+1 & ۰ \end{bmatrix}$ باشد و بعلاوه $B\begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}A+B\begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}A$ برابر $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، (r,s) کدام است؟

❶ $(۱,۴)$ ❷ $(-۱,۴)$ ❸ $(-۱,-۴)$ ❹ $(۱,-۴)$

پاسخ

اگر A، B و C ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی دو بوده، $AB=\begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، $BC=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $CA=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس ABC کدام می‌تواند باشد؟

❶ $\begin{bmatrix} ۲ & ۶ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۳ & ۶ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}$

پاسخ

جابجایی بودن ضرب:

می‌دانیم ضرب ماتریس‌ها در کل خاصیت جابجایی ندارد. اما چند حالت خاص در جابجایی وجود دارد:

۱) ماتریس مربعی A و توان‌هایش، با خودشان جابجا می‌شوند:

$$AA^۲=A^۲A=A^۳ \quad , \quad A^۲A^۳=A^۳A^۲=A^۵ \; , \; \dots$$

توجه فرمایید:

۲) ماتریس‌های قطری هم‌مرتبه، با هم خاصیت جابجایی ضربی دارند؛ یعنی اگر A و B هر دو قطری و هم‌مرتبه باشند، آنگاه داریم:

$$AB = BA$$

۳) ماتریس همانی I با هر ماتریس مربعی A هم مرتبه‌ی خودش جابجا می‌شود:

$$AI = IA = A$$

نتیجه:

ماتریس اسکالر با هر ماتریس هم‌مرتبه خود در ضرب جابجا می‌شود. چون ماتریس اسکالر به صورت $A = cI$ بوده و داریم:

$$AB = cIB = cB \quad , \quad BA = BcI = cBI = cB$$

بعلاوه:

وقتی ماتریس با دو یا چند ماتریس جابجا شود، با جمع، تفریق و ضرب آن‌ها نیز قابل جابجا کردن است.

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، ضرب ماتریس A با چه تعداد از ماتریس‌های زیر تعویض‌پذیر است؟ (I مرتبه‌ی ۳ است.)

الف) $۲A + I$ ب) $A^۲ - I$ پ) $A^۲$ ت) $A^۲ + I$

❶ ۱ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۴

پاسخ

اگر A یک ماتریس اسکالر باشد به طوری که $A^۲ = \begin{bmatrix} ۹ & ۰ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$، $B^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$ و $BA = \begin{bmatrix} -۳ & ۳ \\ ۰ & -۹ \end{bmatrix}$، ماتریس $(A - ۲B)(A - B)$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۷ \\ ۰ & ۳۶ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۲۰ \\ ۰ & ۵۴ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} ۲۰ & -۱۷ \\ ۰ & ۵۴ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۱۷ & ۲۰ \\ ۰ & ۳۶ \end{bmatrix}$

پاسخ

یکی از موضوعات مهم در مبحث ضرب ماتریس، تعیین توان دلخواهی از برخی ماتریس‌ها است که در ادامه به آن پرداخته شده است. ابتدا یک مورد خاص:

نکته ۱۲

توان‌رسانی ماتریس قطری:

اگر A یک ماتریس قطری باشد، برای به توان رساندن A، کافی است درایه‌های قطری را به توان رساند:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \Rightarrow A^k=\begin{bmatrix} a_1{}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2{}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n{}^k \end{bmatrix}$$

بویژه:

برای هر عدد طبیعی k داریم: $I^k=I$.

بعلاوه:

اگر A ماتریسی قطر فرعی باشد (مانند نمونه‌ی زیر)، ماتریس A^2 قطری بوده و برای محاسبه‌ی توان‌های بالاتر A، نکته‌ی قبل قابل کاربرد خواهد بود. نمونه:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^{100}-A^{99}$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ❹ $\overline{O}$

پاسخ

اگر $A=\begin{bmatrix} 7 & 3 & -13 \\ 11 & 5 & 3 \\ 6 & -9 & -11 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -9 & -3 & 13 \\ -11 & -7 & -3 \\ -6 & 9 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $(B^2-2A+AB)^{11}$ کدام است؟

❶ $2^{22}I$ ❷ $2^{11}A$ ❸ $2^{22}B$ ❹ $2^{44}I$

پاسخ

نکته ۱۳

توان‌رسانی ماتریس دلخواه:

برای محاسبه‌ی توان‌های یک ماتریس مربعی A، ماتریس‌های $A^۲$، $A^۳$ و ... را تا آنجا تعیین می‌کنیم که:

- به ماتریس همانی I یا ماتریسی بر حسب آن برسیم؛ یا
- یک نظم در توان‌های ماتریس مشاهده شود.

سپس می‌توان هر توانی از A را مشخص نمود.

توجه کنید:

- اگر r یک عدد و A یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه: $(rA)^n = r^n A^n$.

بویژه:

n فرد باشد: $(-A)^n = -A^n$ و n زوج باشد: $(-A)^n = A^n$

- ولی تساوی $(AB)^n = A^n B^n$ نادرست بوده و فقط با شرط $AB = BA$ برقرار است.

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل جمع درایه‌ها در ماتریس $A^۴$ کدام است؟

❶ ۸۱ ❷ ۲۷ ❸ ۲۴۳ ❹ ۹

پاسخ

اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $A^{۱۰۰}$ حاصل جمع درایه‌ها کدام است؟

❶ ۳۰۳ ❷ ۱۰۳ ❸ ۲۰۰ ❹ ۲۰۳

☑ پاسخ

اگر برای ماتریس مربعی A داشته باشیم: $A^2 + I = A$، ماتریس A^{1403} برابر کدام است؟

❶ $-A$ ❷ $I - A^2$ ❸ $I - A$ ❹ A^2

☑ پاسخ

نکته ۱۴

هرگاه A ماتریسی مربعی باشد، درایه‌های قطر اصلی A^2 از ضرب سطرها در ستون هم‌شماره‌ی خود حاصل می‌شوند. دقیق‌تر:

اولین درایه‌ی قطری در A^2 = ضرب سطر اول در ستون اول A

دومین درایه‌ی قطری در A^2 = ضرب سطر دوم در ستون دوم A

«با ادامه، تمام درایه‌های قطر اصلی معلوم خواهند شد.»

در کل:

در ضرب AB، اگر ماتریس جواب مربعی باشد، درایه‌های قطری از ضرب سطرهای A در ستون‌های هم‌شماره در ماتریس B حاصل می‌شوند.

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 24 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ باشند، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C^2 کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ ۱۶ ❷ ۱۸ ❸ ۲۰ ❹ ۲۴

☑ پاسخ

TEST تمرین تست

۱– اگر $\begin{bmatrix} ۲x-۱ \\ ۲+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۵ \\ ۱+۲y \end{bmatrix}$ آن‌گاه ماتریسی با x سطر و y ستون چگونه است؟

❶ سطری ❷ ستونی ❸ مربعی ❹ عدد حقیقی

۲– اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۲$ چگونه است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۹ & ۴ \end{bmatrix}$ ❷ $\overline{O}_{۲\times۲}$ ❸ $I_{۲\times۲}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۶ & -۴ \end{bmatrix}$

۳– اگر $A^۲ = \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۱۲ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B^۲ = \begin{bmatrix} -۲ & -۵ \\ ۱۵ & ۱۳ \end{bmatrix}$ و $A+B = ۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند، آن‌گاه $AB+BA$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲۷ & ۱۶ \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۶ & -۱ \\ ۲۷ & ۱۶ \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲۷ & ۱۶ \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} ۶ & ۱ \\ ۲۷ & ۱۶ \end{bmatrix}$

۴– در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲(A-I)$ کدام است؟

❶ ۲ ❷ ۴ ❸ ۸ ❹ صفر

۵– اگر $A_{۳\times۴}$ و $B_{۳\times۳}$ باشد، کدام یک از اعمال زیر قابل انجام است؟

❶ $A \times B$ ❷ $B^۲ \times A - ۲A$

❸ $B^۲ - A$ ❹ $I_۳ \times A + B$

۶– اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A^۲ = aA + bI$، آنگاه $a+b$ کدام است؟

❶ -۱ ❷ -۳ ❸ ۳ ❹ ۱

۷– اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه بوده و تساوی $AB = ۲BA$ برقرار باشد، $(A+B)^۲$ کدام است؟

❶ $A^۲ + AB + B^۲$ ❷ $A^۲ + ۳AB + B^۲$

❸ $A^۲ + ۲AB + B^۲$ ❹ $A^۲ + ۳BA + B^۲$

۸– اگر A، B و C سه ماتریس باشند، آنگاه کدام مورد همواره صحیح است؟

❶ $AB = BA$ ❷ $A(B+C) = AB + AC$

❸ $AB = AC \Rightarrow B = C$ ❹ $AB = \overline{O} \Rightarrow A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$

۹- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B=A^{2}$، آنگاه حاصل $\sum_{i=1}^{3} b_{ii}$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۶ ❸ ۴ ❹ ۲

۱۰- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A+A^{2}+A^{3}+A^{4}+A^{5}$ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ ۲۰ ❸ ۵ ❹ ۲

۱۱- اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{10}+A^{20}$ چقدر است؟

❶ ۴ ❷ صفر ❸ ۴- ❹ ۲

۱۲- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{3}(A+I)$ کدام است؟

❶ ۲۴ ❷ ۱۶ ❸ ۹۴ ❹ ۴۸

۱۳- در ماتریس $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه‌های ماتریس $A+A^{2}+A^{3}+A^{4}$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۱۲ ❹ ۶

۱۴- اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^{1396}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، آنگاه مقدار $a+b+c+d$ کدام است؟

❶ ۱۳۹۶ ❷ ۱۳۹۵ ❸ ۱۳۹۹ ❹ ۱۳۹۸

۱۵- اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ و $A^{3}=I$ باشد، در این‌صورت a کدام است؟

❶ ۰ ❷ ۲ ❸ ۱ ❹ ۱-

۱۶- اگر A و B دو ماتریس مربعی و $AB=A$ و $BA=B$ باشد، حاصل $A+A^{2}+\cdots+A^{1397}$ کدام است؟

❶ $1396A$ ❷ $1397A$ ❸ $1399A$ ❹ $1398A$

۱۷- اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ و ماتریس $B\times A$ ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $B\times A$ کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۰ ❸ ۶- ❹ ۱۲-

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۱۸– اگر $[۳ \quad ۵] = A \times [۲ \quad ۱]$ و $[۲ \quad -۱] = A \times [۳ \quad ۴]$ باشد، حاصل $A \times [۸ \quad ۹]$ کدام است؟

❶ $[۱ \quad ۹]$ ❷ $[۱ \quad -۹]$ ❸ $[-۱ \quad ۹]$ ❹ $[-۱ \quad -۹]$

۱۹– اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A^{۱۲}$ کدام است؟

❶ $۲^{۱۲}$ ❷ $۲^{۱۱}$ ❸ ۳×۲^{۱۱} ❹ ۳×۲^{۱۲}

۲۰– اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $[۱ \quad -۲ \quad ۱]\begin{bmatrix} x & ۲ & ۱ \\ ۱ & -x & -۱ \\ -۱ & ۱ & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ -۱ \\ x \end{bmatrix} = ۰$ باشند، حاصل $\frac{۱}{\alpha^۲} + \frac{۱}{\beta^۲}$ است؟

❶ $\frac{۴}{۹}$ ❷ $\frac{۱۶}{۹}$ ❸ $\frac{۹}{۱۶}$ ❹ $\frac{۹}{۴}$

۲۱– اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ y & ۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & x \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ نسبت به هم جابجایی بوده و مجموع درایه‌های آن‌ها برابر باشد، مقدار مثبت $x + y$ کدام است؟

❶ ۲ ❷ $\sqrt{۲}$ ❸ $۲\sqrt{۲}$ ❹ ۳

۲۲– در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ حاصل جمع درایه‌های سطر سوم ماتریس $(A - I)^۴$ کدام است؟

❶ ۸ ❷ ۱۰ ❸ ۱۲ ❹ ۵

۲۳– اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$، در کدام مورد زیر، این ماتریس قطری است؟ **(نماد [ ] در گزینه‌ها جزءصحیح است.)**

❶ $a_{ij} = [\frac{i+j}{۲}] - ۲$ ❷ $a_{ij} = [\frac{i-j}{۲}] - ۲$

❸ $a_{ij} = [\frac{i-j}{۳}] - ۱$ ❹ $a_{ij} = [\frac{i+j}{۳}] - ۱$

۲۴– در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & ۱ \\ -۱ & a \end{bmatrix}$، اگر مجموع درایه‌های ماتریس $A^۳$ برابر صفر باشد، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای a کدام است؟ $(a \neq ۰)$

❶ -۲ ❷ -۴ ❸ -۹ ❹ -۳

۲۵– ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ با تعریف $a_{ij} = \begin{cases} ۴ & i+j=۴ \\ ۰ & i+j \neq ۴ \end{cases}$ مفروض است. ماتریس $A^{۱۵}$ برابر کدام است؟

❶ $۲^{۲۸} A$ ❷ $۲^{۲۸} I$ ❸ $۲^{۶۰} A$ ❹ $۲^{۶۰} I$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲۶– اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A+A^{2}$ برابر کدام است؟

❶ 8 ❷ 9 ❸ 10 ❹ 12

۲۷– اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1397 & 1396\\ 0 & 0 & 1395\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$، حاصل $(A^{4}-I)(I+A^{3})$ برابر کدام است؟

❶ $A^{1397}+I$ ❷ $A^{7}+I$ ❸ $A^{1398}-I$ ❹ $I-A$

۲۸– اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^{3} کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ $[30\ \ 6\ \ 64]$ ❷ $[30\ \ 6\ \ 78]$

❸ $[24\ \ 8\ \ 86]$ ❹ $[30\ \ 6\ \ 86]$

۲۹– اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^{2} چند برابر مجموع درایه‌های A است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱٤۰۳)

❶ -1 ❷ 1 ❸ -3 ❹ 3

ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱– ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}$ برابر کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 55 & 1\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}10 & 0\\ 55 & 10\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 11 & 1\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}1 & 10\\ 55 & 1\end{bmatrix}$

۲– اگر $A^{4}=3I^{3}-2I^{2}$ باشد، ماتریس A^{1397} برابر کدام است؟

❶ A ❷ A^{2} ❸ A^{3} ❹ I

۳– اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ و $BA^{n}=\begin{bmatrix}4 & 41\\ 3 & 32\end{bmatrix}$، آنگاه:

❶ $n=9$ ❷ $n=11$ ❸ $n=8$ ❹ $n=10$

۴- اگر $A=\begin{bmatrix} n & n+1 \\ 1-n & -n \end{bmatrix}$، آنگاه A^{2016} کدام است؟

❶ A ❷ I ❸ $2016A$ ❹ $\overline{O}$

۵- ماتریس مربع A در تساوی $A^3=-I$ صدق می‌کند. ماتریس A^{1395} کدام است؟

❶ I ❷ A ❸ $-A$ ❹ $-I$

۶- اگر $A=\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه A^6 کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۷- اگر $A=[3j-2i]_{3\times 5}$ و $B=[-i-2j]_{3\times 5}$ باشند، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $3B+2A$ کدام است؟

❶ -70 ❷ -140 ❸ -210 ❹ -280

۸- A ماتریسی مربعی است که در رابطهٔ $A^2-A+I=\overline{O}$ صدق می‌کند. ماتریس A^{31} برابر کدام است؟

❶ I ❷ A^2+I ❸ $-I$ ❹ A^2-I

۹- A ماتریسی مربعی مرتبه ۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} 0 & i+j\neq 4 \\ -1 & i+j=4 \end{cases}$ است. مجموع درایه‌های مـاتریس $A^{1401}+A^{1402}$ کدام است؟

❶ 0 ❷ 1 ❸ -1 ❹ -2

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴