



آموزش مفہوم ریاضے

درسنامہ:

ریاضے نمبر

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴



گروه علمی درس آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش آموزان کشور (نهایی ۲۰)



کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

۵:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس آموز؛ (منحصر به فرد)



محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)



پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)



تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)



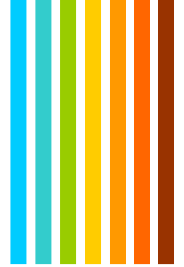
سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)



پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date



۳

استدلال و اثبات

۵۸

مفهوم استدلال، آشنایی با اثبات، اثبات در هندسه، تشابه اشکال و محاسبات، تمرینات پایانی

۲

عددهای دقیق

۳۱

عددهای گویا، معرفی عددهای حقیقی، قدر مطلق و محاسبات قدرمطلق، تمرینات پایانی

۱

مجموعه‌ها

۲

مفاهیم پایه مجموعه‌ها، اعمال جبری (اجتماع، اشتراک و ...)، مجموعه‌ها و احتمال، تمرینات پایانی

۶

خط و معادلات

۱۴۹

معادله‌ی خط، معرفی مفهوم شیب خط، حل دستگاه معادلات، تمرینات پایانی

۵

عبارت‌های جبری

۱۱۲

عبارت‌های جبری، چند جمله‌ای، اتحاد و تجزیه، حل نامعادلات، تمرینات پایانی

۴

توان و ریشه

۸۳

توان‌های مثبت و منفی اعداد، نماد علمی، ریشه‌گیری، محاسبات و قوانین رادیکالی، تمرینات پایانی

۸

مساحت و حجم

۱۹۳

روش محاسبه مساحت و حجم کره و نیم‌کره، حجم هرم و مخروط، تمرینات پایانی

۷

عبارت‌های گویا

۱۷۲

عبارت‌های گویا، محاسبات گویا (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)، تقسیم چندجمله‌ای، تمرینات پایانی





مجموعه‌ها

صفحه	فهرست
۳	معرفی مجموعه
۸	زیرمجموعه‌ها
۱۶	جبر مجموعه‌ها
۲۳	مجموعه‌ها و اتمال
۲۹	پاسخ فعالیت‌های پای تفته

معرفی یک مفهوم بسیار مهم و دارای کاربردهای فراوان:

مجموعه:

هر گاه تعدادی شیء یا عدد را کنار هم در نظر بگیریم، یک «مجموعه» ساخته می‌شود. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ A ، B ، C و ... نام‌گذاری می‌کنیم.

برای نمونه؛

مجموعه‌ی شمارنده‌های مثبت عدد ۱۸ را می‌توان به صورت $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ نمایش داد. همچنین، $B = \{2, 3\}$ مجموعه شمارنده‌های اول و $C = \{6, 9, 18\}$ مجموعه شمارنده‌های مرکب عدد ۱۸ هستند.

می‌توان گفت: هر مجموعه گروهی از عددها یا اشیاء است.

بعلاوه:

• به اعداد یا اشیاء داخل مجموعه «عضو» گوئیم. برای نمونه؛ عدد ۳ عضو مجموعه‌ی A بوده و عدد ۴ عضو آن نیست؛ پس می‌نویسیم:

$$3 \in A \quad \text{و} \quad 4 \notin A$$

• مانند بالا، برای نمایش ساده‌ی یک مجموعه، اعضای آن را بین دو آکولاد « $\{$ » و « $\}$ » نوشته و بین آن‌ها ویرگول انگلیسی « $,$ » قرار می‌دهیم.

مثال: به نمونه‌های زیر توجه کنید:

$$B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

(الف) مجموعه‌ی عددهای صحیح بین -4 و 3 برابر است با:

(ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

**توجه کنید:**

\mathbb{N} نماد استاندارد و جهانی برای مجموعه‌ی عددهای طبیعی است.

مثال: A را مجموعه‌ی اعداد اول بزرگ‌تر از ۱۱ و کمتر از ۲۵ بگیرید.

(الف) این مجموعه را با نوشتن اعضا نمایش دهید.

(ب) کدام مورد درست و کدام نادرست است؟

$$-\frac{15}{3} \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad 21 \notin A \quad \text{و} \quad 11 \in A \quad \text{و} \quad 24 \in A$$

پاسخ

الف) تمام عددهای اول بین ۱۱ و ۲۵ در مجموعه می‌آیند:

$$A = \{13, 17, 19, 23\}$$

ب) از سمت راست، $21 \notin A$ درست بوده و دو مورد دیگر نادرست هستند. چون $-\frac{15}{3} = -5$ ، مورد آخر صحیح است.



مثال: (مشابه کتاب) سه عبارت بنویسید که دوتای آنها مشخص کننده‌ی مجموعه‌ای فقط با یک عضو و سومی مشخص کننده‌ی مجموعه‌ای با دو عضو باشد.

پاسخ ✓

الف) «مجموعه عددهایی مثبت که هر عددی بر آنها بخش پذیر باشد» برابر است با: $\{1\}$

ب) «مجموعه عددهای اول زوج» برابر است با: $\{2\}$

پ) «مجموعه عددهای اول فرد کمتر از ۶» برابر است با: $\{3, 5\}$



شرط تشکیل دنباله:

برای آن که یک بیان در مورد تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهد، لازم است:

اعداد یا اشیاء ذکر شده دقیقاً «مشخص» یا «معین» باشند.

یعنی:

برای هر شیء یا عدد دلخواهی، دقیقاً معلوم باشد که آیا در مجموعه هست یا خیر.

به عبارت دیگر، لازم است:

تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی نداشته باشد.

چند نمونه:

الف) عبارت: «اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا:

دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

ب) عبارت «پنج عدد طبیعی» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا:

دقیقاً معلوم نیست کدام عددهای طبیعی جزء این پنج‌تا بوده و کدام‌ها جزء آنها قرار ندارند.

مثال: کدام جملات زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

الف) سخت‌ترین کتاب درسی در پایه نهم.

ب) سه نفر اول رتبه‌بندی کنکور سال ۱۴۰۳ رشته‌ی تجربی.

پاسخ ✓

الف) سخت بودن درس به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی دارد، پس این جمله مجموعه مشخص نمی‌کند.

ب) این جمله یک مجموعه مشخص می‌کند، زیرا نقرات اول تا سوم کنکور هر سال افراد مشخصی هستند که بعد از آزمون دقیقاً معلوم

شده و به جامعه معرفی می‌شوند.



استان یزد - خرداد ۱۴۰۰

عبارت «دو عدد اول کوچک‌تر از ۶» مشخص‌کننده‌ی یک مجموعه است. (درست نادرست)

پاسخ

نادرست است؛

زیرا سه عدد اول ۲ و ۳ و ۵ وجود داشته و مشخص نیست کدام دو عدد باید در مجموعه باشند.



پای تخته



۱. مشخص کنید کدام موارد یک مجموعه مشخص می‌کنند؟ (از کتاب)

- (الف) سه عدد زوج متوالی با شروع از ۲
 (ب) سه شهر ایران
 (پ) پنج عدد بزرگ
 (ت) شماره‌های عدد ۲۴
 (ث) چهار عدد فرد متوالی

توجه کنید: (مهم)

دو مطلب قابل توجه دیگر در مورد مجموعه‌ها:

- اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

اگر در مجموعه عضو تکراری نوشته شده باشد، آن را فقط یک‌بار شمرده و تکرار را حذف می‌کنیم.

برای نمونه؛

مجموعه‌ی $B = \{۳, ۵, ۳\}$ دارای دو عضو است و نمایش اصلاح شده‌ی آن $B = \{۳, ۵\}$ می‌باشد.

- ترتیب نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.

برای نمونه؛

عبارت‌های $\{a, b, c\}$ و $\{c, a, b\}$ تفاوتی نداشته و هر دو یک مجموعه را معرفی می‌کنند.

مجموعه تهی:

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی «تهی» نام داشته و آن را با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

برای نمونه؛

چون اعداد طبیعی همگی مثبت هستند؛ «مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از صفر» به صورت تهی $\{\}$ است.

توجه کنید:

مجموعه‌ی $\{\emptyset\}$ دارای یک عضو بوده و با \emptyset یکی نیست.



مثال: کدام بیان معرف مجموعه‌ی تهی است؟

الف) اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲. ب) اعداد صحیح کوچک‌تر از صفر. پ) اعداد اول کوچک‌تر از ۲.

پاسخ ✓

الف) این مجموعه یک عضو دارد و تهی نیست؛ {۱}.

ب) بی‌شمار عدد صحیح کمتر از صفر داریم:

$$\{-1, -2, -3, -4, \dots\} \neq \emptyset$$

پ) می‌دانید که کوچک‌ترین عدد اول ۲ است و بنابراین در این قسمت جواب \emptyset خواهد شد.



روش مفیدی برای نمایش مجموعه‌ها معرفی می‌کنیم.

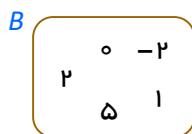
نمودار ون:

در این روش، مجموعه‌ها را با استفاده از شکل‌های هندسی نمایش می‌دهیم؛ به این صورت که:

- یک شکل هندسی مثلاً چند ضلعی یا دایره رسم می‌کنیم.
- اعضای مجموعه را داخل آن می‌نویسیم.

برای نمونه:

نمودار ون مجموعه‌ی $B = \{-2, 0, 1, 2, 5\}$ به صورت مقابل است:



مثال: هر مورد در زیر که یک مجموعه مشخص می‌کند را با نمودار ون نشان دهید.

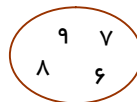
الف) هشت عدد طبیعی یک رقمی. ب) چهار عدد طبیعی بین ۵ و ۱۰.
پ) حروف صدا دار زبان انگلیسی.

پاسخ ✓

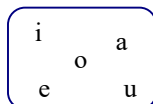
الف) چون تعداد ۹ عدد طبیعی یک رقمی وجود دارد، عضوها مشخص نبوده و مجموعه تشکیل نمی‌شود.

ب) فقط چهار عدد طبیعی بین ۵ و ۱۰ وجود دارد و در نتیجه جمله‌ی بیان شده مجموعه است:

$$\{6, 7, 8, 9\}$$



پ) این حروف پنج مورد و کاملاً مشخص هستند:

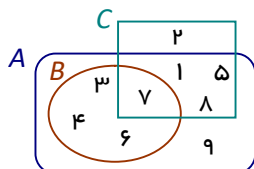


$$\{a, e, i, o, u\}$$



مثال: مجموعه‌های $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، $B = \{3, 4, 6, 7\}$ و $C = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ را با نمودار ون نمایش دهید.

پاسخ ✓



به آسانی می‌توان نمودار را رسم کرد:



پاسخ دهید (۱)

- ۱- کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟
 الف) کارکنان دارای تحصیلات دانشگاهی در شرکت سامسونگ
 ب) کارکنان دارای خلاقیت در شرکت سامسونگ
- ۲- هر کدام از موارد زیر یک مجموعه مشخص می‌کند را با نمودار ون نمایش دهید.
 الف) شماره‌های اول عدد ۱۳.
 ب) شماره‌های اول عدد ۱.
 پ) جواب‌های معادله‌ی $-2x + 7 = 1$.
 ت) سه عددی که در پرتاب یک تاس نمایان می‌شود.
- ۳- سه مجموعه‌ی متفاوت بنویسید که عدد ۵ عضو آن‌ها باشد.

منتخب کتاب:

- ۱- متناظر با هر عبارت یک مجموعه و متناظر با هر مجموعه، یک عبارت نوشته و تعداد اعضای هر مجموعه را تعیین کنید:
- الف) $A = \{1, 8, 27, 64, 125\}$ ب) $C = \{10\}$
 پ) عددهای طبیعی مضرب ۵ و کوچک‌تر از ۱۰۰ ت) عددهای طبیعی بزرگ‌تر از ۴ و کوچک‌تر از ۵
 ث) عددهای صحیح منفی که بین ۴ و ۷ قرار دارد. ج) عددهای اول دو رقمی که مضرب ۷ باشد.
- ۲- جاهای خالی را طوری کامل کنید تا عبارت حاصل درست باشد.
 الف) عبارت «پنج عدد طبیعی که بین ۱ و ۲۰ قرار داشته باشد»، یک مجموعه را مشخص
 ب) مجموعه $\{2, 3, 4, \dots, 9\}$ دارای عضو است.
 پ) مجموعه $A = \{0, \emptyset\}$ دارای عضو است.
 ت) با توجه به مجموعه‌ی $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ ، داریم: ۵ عضو A است، یا با نماد ریاضی



چالش (ویژه علاقمندان)

۱- مجموعه‌ی عددهای صحیح بین دو عدد $13 - \sqrt{13}$ و $-17 + \sqrt{17}$ را بنویسید.

۲- اگر $x \in \mathbb{Z}$ و $-x \in A$ درست باشد، آنگاه مجموعه‌ی A کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

- \mathbb{N} \mathbb{R} \mathbb{Q} \mathbb{Z}

در این بخش، مفاهیمی مهم در ارتباط با دو مجموعه بیان و بررسی می‌شود.

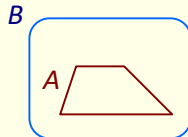
زیر مجموعه:

دو مجموعه‌ی A و B را در نظر بگیرید. هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی A در B هم قرار داشته باشد، یعنی:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

در این صورت گوئیم A «زیر مجموعه» B است و می‌نویسیم:

$$A \subseteq B \quad \text{یا} \quad A \subset B$$



(نمادهای \subseteq و \subset یک معنی دارند.)

توجه کنید:

اگر شرط بالا برقرار نباشد، A زیر مجموعه‌ی B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.

به نمونه‌های بعدی توجه کنید:

مثال: با توجه به مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، پاسخ دهید:

الف) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن عدد اول باشند.

ب) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مضرب ۲ باشند.

پ) زیر مجموعه‌ای از A بنویسید که اعضای آن مجذور کامل باشند.

پاسخ ✓

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

الف) **الف)** عددهای اول که در A هستند را می‌نویسیم:

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

ب) **ب)** مشابه قسمت قبل، عددهای مضرب ۲ در A نوشته می‌شوند:

پ) **پ)** واضح است که:

$$D = \{1, 4, 9\}$$

--- ✨ ---

مثال: کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

$$W \subseteq \mathbb{Z}$$

$$W \subseteq \mathbb{N}$$

پاسخ ✓

عبارت $W \subseteq \mathbb{N}$ نادرست است، زیرا عدد صفر در W هست ولی در \mathbb{N} قرار ندارد؛ ولی $W \subseteq \mathbb{Z}$ درست است.

--- ✨ ---

آذربایجان شرقی - خرداد ۱۴۰۲

کدام مورد از موارد زیر درست است؟



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \quad \square$$

$$\sqrt{15} \in \mathbb{Q} \quad \square$$

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z} \quad \square$$

$$0 \in \mathbb{N} \quad \square$$

پاسخ

واضح است که هر عدد طبیعی، صحیح هم هست و بنابراین: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. (مورد چهارم)



مثال: فرض کنید $A \not\subseteq B$ و عدد ۲ عضو مجموعه‌ی A باشد. آیا عبارت $2 \notin B$ صحیح است؟ چرا؟

پاسخ

خیر، زیرا ممکن است عدد ۲ عضو مجموعه‌ی B باشد، ولی برخی دیگر از عضوهای A در مجموعه‌ی B قرار نداشته باشند.

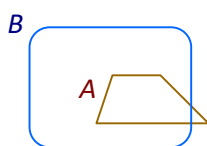


در ادامه‌ی استدلال مثال قبل:

توجه کنید: (مهم)

اگر بدانیم $A \not\subseteq B$ ، در این صورت به مطلب مهم زیر می‌توان اشاره کرد:
ممکن است بسیاری از اعضای A در مجموعه‌ی B هم باشند؛ اما:

لااقل یک عضو در A هست که در B قرار ندارد.



شکل مقابل را ببینید:

نمونه‌ای دیگر:

برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، چون $1 \in A$ است، ولی $1 \notin B$.
در نتیجه:

در این نمونه، عبارت $A \not\subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B نیز هستند).

نتیجه:

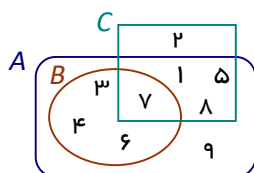
برای هر مجموعه‌ی دلخواه A ؛

رابطه‌ی $\emptyset \subseteq A$ همیشه درست است.

زیرا:

اگر $\emptyset \not\subseteq A$ باشد، باید یک عضو در \emptyset یافت شود که عضو A نباشد؛ ولی می‌دانیم \emptyset عضوی ندارد.

مثال: سه مجموعه‌ی A ، B و C را در نمودار ون روبه‌رو ببینید:



دو مورد زیر را بررسی و کنترل کنید.

الف) موارد زیر همگی درست هستند:

$$B \subseteq A \quad \text{و} \quad C \not\subseteq A \quad \text{و} \quad \{3, 7\} \subseteq C \quad \text{و} \quad \{2, 7\} \subseteq C$$

ب) موارد زیر همگی نادرست هستند:

$$\{1\} \in A \quad \text{و} \quad C \subseteq A \quad \text{و} \quad \{4, 7\} \subseteq B \quad \text{و} \quad \{2, 7\} \subseteq A$$



مثال: تمام زیر مجموعه‌های $A = \{2, a\}$ را بنویسید.

پاسخ

همه‌ی مجموعه‌های ممکن را می‌نویسیم:

$$\{ \} \quad \{2\} \quad \{a\} \quad \{2, a\}$$

پس مجموعه‌ی داده شده ۴ زیرمجموعه دارد.



توجه کنید:

چنان‌که در بالا هم می‌بینید، رابطه‌ی $A \subseteq A$ برای هر مجموعه‌ی A درست است. (همیشه \emptyset کوچک‌ترین و خودِ مجموعه، بزرگ‌ترین زیرمجموعه محسوب می‌شود).

گاهی برخی از اعضای یک مجموعه، خودشان نیز مجموعه هستند.

پای تخته

۲. تمام زیر مجموعه‌های دو مجموعه‌ی A : مجموعه جواب‌های صحیح معادله $-3x - 5 = -2$ و $B = \{1, 2, \{3\}\}$ را بنویسید.



در ادامه، مفهومی دیگر در ارتباط با دو مجموعه معرفی می‌شود:

مجموعه‌های برابر:

هرگاه اعضای دو مجموعه‌ی A و B کاملاً یکسان باشند، یعنی:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

در این صورت، دو مجموعه را «برابر» یا «مساوی» گفته و می‌نویسیم:

$$A = B$$



توجه کنید:

مجموعه‌های A و B هنگامی برابرند که عبارت‌های $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو درست باشند.

نتیجه:

عبارت $A \neq B$ به این معنی است که: «لااقل یک عضو در یکی از دو مجموعه هست که در دیگری قرار ندارد.»

مثال: در جاهای خالی عددهای مناسب قرار دهید تا تساوی درست شود.

$$\left\{-3, \frac{1}{5}, \dots, \frac{12}{4}\right\} = \left\{\sqrt{9}, -\frac{9}{\dots}, 0/2, -\frac{-(-3)^3}{-\sqrt{16}}\right\}$$

پاسخ ✓

چون عدد -3 در مجموعه‌ی سمت چپ هست، باید در سمت راست هم باشد:

جای خالی سمت راست عدد 3 است. $-\frac{9}{3} = -3$

در مجموعه‌ی سمت راست عدد $\frac{27}{4}$ وجود دارد و در نتیجه جای خالی سمت چپ باید $\frac{27}{4}$ باشد.

توجه کنید:

بقیه‌ی اعضا در دو مجموعه مشترک هستند.



استان کیلان - خرداد ۱۴۰۰

مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که دو مجموعه‌ی $\{y+3, 5\}$ و $\{x-1, 7\}$ برابر باشند.

پاسخ ✓

واضح است که باید داشته باشیم:

$$x-1=5 \Rightarrow x=5+1=6 \quad \text{و} \quad y+3=7 \Rightarrow y=7-3=4$$



مثال: اگر $A = \{x+y, 2, 1\}$ و $B = \{2, 2x, 3\}$ دو مجموعه‌ی برابر باشند، مقادیر x و y را به دست آورید.

پاسخ ✓

باید عضوهای A و B یکسان باشند. با توجه به این که عدد 2 در هر دو مجموعه مشترک است، دو عضو دیگر را با هم برابر قرار داده و معادله‌های به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$x+y=3 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}+y=3 \rightarrow y=\frac{5}{2}$$



نمایش نمادین:

روشی مهم برای نمایش مجموعه‌ها، به زبان (نماد) ریاضی است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی را در نظر بگیرید:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

می‌خواهیم دو زیرمجموعه‌ی پر کاربرد آن:

$$O = \{1, 3, 5, \dots\} \text{ اعداد طبیعی فرد} \quad \text{و} \quad E = \{2, 4, 6, \dots\} \text{ اعداد طبیعی زوج}$$

را به صورت نمادین بنویسیم. چون هر عدد زوج مضرب ۲ است، می‌توان عضوهای E را به صورت زیر نوشت:

$$2, 4, 6, \dots \Rightarrow 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots$$

می‌بینید که الگوی عضوهای E به صورت $2 \times k$ بوده که در آن $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ عددی طبیعی است. به عبارت دیگر مجموعه‌ی E را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$E = \{2k \mid k \text{ عددی طبیعی}\} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

فوائد می‌شود: E برابر است با مجموعه همه عضوهای به صورت $2k$ ، به شرطی که k عددی طبیعی باشد.

به‌طور کاملاً مشابه؛

اعداد طبیعی فرد $1, 3, 5, \dots$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2 \times 1 - 1, 2 \times 2 - 1, 2 \times 3 - 1, \dots \Rightarrow O = \{2k - 1 \mid k \text{ عددی طبیعی}\} = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

مثال: مجموعه‌ی اعداد حسابی را با نماد ریاضی بنویسید.

پاسخ

اعضای مجموعه‌ی $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ از اعداد طبیعی ۱ واحد کوچک‌تر هستند:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots \Rightarrow \underbrace{1}_{=0}, \underbrace{2}_{=1}, \underbrace{3}_{=2}, \underbrace{4}_{=3}, \underbrace{5}_{=4}, \dots$$

پس هر عدد در W به صورت $k - 1$ است که در آن k عددی طبیعی است. در نتیجه می‌نویسیم:

$$W = \{k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$



پای تخته!

۳. مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید.

(الف) $\{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ (ب) $\{0, 3, 8, 15, 24, \dots\}$



معمولاً روند برعکس بالا را نیاز داریم:

مثال: (از کتاب) مجموعه‌ی $A = \{5n + 3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ را با عضوهای مشخص کنید.

پاسخ



کافی است عددهای طبیعی را در الگوی $5n + 3$ جایگزین سازیم:

$$\begin{aligned} n=1 &\rightarrow 5(1)+3=8 & n=2 &\rightarrow 5(2)+3=13 & n=3 &\rightarrow 5(3)+3=18 \\ n=4 &\rightarrow 5(4)+3=23 & n=5 &\rightarrow 5(5)+3=28 & & \dots \end{aligned}$$

این روند تا بی‌نهایت ادامه دارد و مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \{8, 13, 18, 23, 28, \dots\}$$



مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) $A = \{9x \mid x \in \mathbb{Z}, -2 < x \leq 2\}$

ب) $B = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{W}\}$

پ) $C = \left\{ \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x \leq 5 \right\}$



الف) باید عددهای صحیح از -1 تا 2 را جای x قرار می‌دهیم:

$$9 \times (-1), 9 \times (0), 9 \times 1, 9 \times 2 \Rightarrow A = \{-9, 0, 9, 18\}$$

ب) مشابه قسمت قبل، عددهای \mathbb{W} را از ابتدا در عبارت $x^2 - 1$ به جای x قرار می‌دهیم:

$$(0)^2 - 1, (1)^2 - 1, (2)^2 - 1, (3)^2 - 1, \dots \Rightarrow B = \{-1, 0, 3, 8, \dots\}$$

توجه کنید که عددهای \mathbb{W} بی‌پایان هستند و بنابراین مجموعه‌ی B هم پایان ندارد.

پ) فقط عددهای طبیعی $1, 2, 3, 4$ و 5 را جای x قرار می‌دهیم:

$$\frac{(1)^2}{\sqrt{1-1}}, \frac{(2)^2}{\sqrt{2-1}}, \frac{(3)^2}{\sqrt{3-1}}, \frac{(4)^2}{\sqrt{4-1}}, \frac{(5)^2}{\sqrt{5-1}} \Rightarrow C = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{4}{13}, \frac{9}{20}, \frac{16}{27}, \frac{25}{34} \right\}$$



پای تخته

$$A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 1\}$$

۴. مجموعه‌ی مقابل را با نوشتن اعضاء مشخص نمایید:



پاسخ دهید (۲)

۱- تمام زیرمجموعه‌های هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

• $\{a, b, \{c\}\}$

• $\{1, 2, \{1, 2\}\}$



۲- در هر یک از موارد زیر، مجموعه‌های A و B برابرند. مجهولات موجود در مجموعه‌ها را تعیین کنید:

• $B = \{-۳, ۵, ۲n-۱\}$ و $A = \{۳, ۵, m+۲n\}$

• $B = \{۳+y, ۴\}$ و $A = \{۵, x-۱\}$

۳- در تساوی $\{m\} = \{۲۵-۳x, ۵-۲x\}$ ، مقدار m را بیابید.

۴- از تساوی زیر مقدر x و y را بیابید:

$$\{\{x\}, ۷, ۴-y\} = \{x-y, \{۳\}, ۸\}$$

۵- مجموعه‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید:

• مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد بین ۶ و ۲۱ $A =$

• $B = \{۲, ۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸\}$

• $D = \{۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \dots\}$

۶- اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

• $A = \{۳k-۱ : k \in \mathbb{N}, -۳ \leq k < ۵\}$

• $B = \left\{ \frac{x^۲}{1+x^۲} \mid x \in \mathbb{Z}, -۴ \leq x < ۲ \right\}$

۷- مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۸ را به دو صورت زیر بنویسید:

• با نوشتن اعضاء

• با استفاده از نمادهای ریاضی

۸- کدام مورد درست و کدام مورد نادرست است؟

• $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

• $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

• $\emptyset \subset \{1\}$

• اگر $A \subset \emptyset$ باشد، آنگاه A برابر تهی است.

• اگر $A \not\subset B$ و $a \in A$ باشد، آنگاه $a \notin B$.

۹- مجموعه‌های $W, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ و \mathbb{Q} را در یک نمودار ون به صورت صحیح نمایش دهید.

منتفب کتاب:

۱- مجموعه‌ی $A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$$B = \{x \mid x \in A, x^۲ \leq ۲\}, \quad C = \{x \mid x \in A, -۱ \leq x \leq ۱\}, \quad D = \{x \mid x \in A, x^۲ \leq ۱\}$$

۲- سه مجموعه مانند A, B و C بنویسید به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$. آیا می‌توان نتیجه گرفت: $A \subseteq C$ ؟

۳- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید:



- الف) هر عدد گویا، عددی حسابی است.
 ب) هر عدد حسابی، عددی گویا است.
 پ) هر عدد صحیح، عدد گویا است.
 ت) بعضی از اعداد گویا، عدد صحیح هستند.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

- الف) مجموعه‌ی $A = \{\{1, 2, 3, \dots\}\}$ چند زیرمجموعه دارد؟
 ب) مجموعه‌ی $A = \{2^{x-3y} \mid x-1=3y\}$ را با نوشتن عضوهایش به صورت ساده نمایش دهید.



۳
جبر مجموعه‌ها

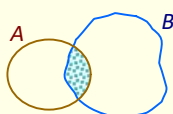
در این بخش، با روش‌هایی برای ساخت مجموعه‌هایی جدید آشنا می‌شویم. اولین روش:

اشتراک:

برای دو مجموعه‌ی A و B ، «اشتراک» آن‌ها:

مجموعه‌ی تمام اعضای است که هم در A و هم در B قرار داشته باشند.

این مجموعه را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهیم. بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$

مثال: اگر $A = \{-1, 2, 0, 4\}$ و $B = \{0, 2, 4\}$ و $C = \{3, -1, 6\}$ ، مجموعه‌های $A \cap B$ ، $B \cap C$ و $A \cap C$ را مشخص کنید.

پاسخ ✓

عضوهای مشترک مجموعه‌ها را در هر حالت می‌نویسیم:

$$A \cap B = \{-1, 2, 0, 4\} \cap \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 4\}$$

به‌طور مشابه:

$$B \cap C = \{0, 2, 4\} \cap \{3, -1, 6\} = \emptyset \quad \text{و} \quad A \cap C = \{-1, 2, 0, 4\} \cap \{3, -1, 6\} = \{-1\}$$



شهرستان‌های استان تهران - خرداد ۱۴۰۲

اگر $A = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$ و $B = \{2, 3, 5, 7\}$ باشد، مجموعه‌ی $A \cap B$ را با اعضاء مشخص کنید.

پاسخ ✓

به آسانی $A = \{2, 3, 4\}$ نوشته می‌شود و در نتیجه:

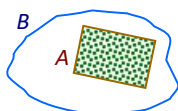
$$A \cap B = \{2, 3\}$$



خواص اشتراک:

در مورد مجموعه‌های A و B به موارد ساده‌ی زیر می‌توان اشاره کرد:

- اشتراک هر مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است:
- واضح است که تهی با هیچ مجموعه‌ای عضو مشترک ندارد:
- اگر $A \subseteq B$ باشد، اشتراک آن‌ها برابر **مجموعه‌ی کوچک‌تر** یعنی A است:



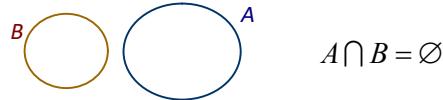
$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

(**نمونه:** در مثال قبل $B \subseteq A$ بوده و در نتیجه $A \cap B = B$ شده است.)



حالت ویژه:

ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند که در این صورت آن‌ها را «**مجازا**» یا «**مجازا**» گویند:



برای نمونه:

مجموعه‌های اعداد طبیعی فرد O و اعداد طبیعی زوج E , مجزا هستند:

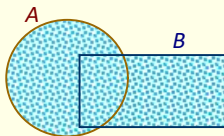
$$O \cap E = \emptyset$$

عمل دیگر بین دو مجموعه به صورت زیر بیان می‌شود:

اجتماع:

برای دو مجموعه‌ی A و B , اجتماعشان را با $A \cup B$ نشان داده و آن:

شامل تمام اعضایی است که لااقل در یکی از A یا B قرار داشته باشند.



بنابراین با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

توجه کنید:

مجموعه‌ی $A \cup B$ از کنار هم قرار دادن اعضای دو مجموعه به دست می‌آید و البته:

در اجتماع، اعضای تکراری فقط یک بار نوشته می‌شوند.

مثال: اگر $A = \{-1, 2, 0, 4\}$ و $B = \{0, 2, 4\}$ و $C = \{3, -1, 6\}$, مجموعه‌های $A \cup B$ و $B \cup (A \cap C)$ را مشخص کنید.

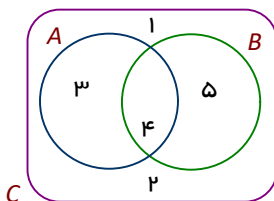


عضوهای مجموعه‌ها را در هر حالت کنار هم می‌نویسیم:

$$A \cup B = \{-1, 2, 0, 4\} \cup \{0, 2, 4\} = \{-1, 2, 0, 4\}$$

به‌طور مشابه، چون $A \cap C = \{-1\}$ است:

$$B \cup (A \cap C) = \{0, 2, 4\} \cup \{-1\} = \{-1, 0, 2, 4\}$$



مثال: (از کتاب) با توجه به نمودار روبرو، کدام درست و کدام نادرست است؟

(الف) $A \subseteq C$

(ب) $C \subseteq (A \cup B)$

(ج) $A \cap C = \{-1\}$

(د) $4 \in (A \cup B)$

(ه) $4 \notin (A \cap B)$





الف درست است.

ب نادرست است؛ چون $1 \in C$ است، ولی 1 در $A \cup B$ قرار ندارد.

ث درست است.

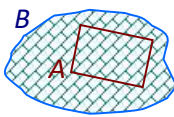
ت نادرست است.



خواص اجتماع:

در مورد اجتماع مجموعه‌ها به موارد زیر می‌توان اشاره کرد:

- اجتماع هر مجموعه با خودش، برابر همان مجموعه است:
- واضح است که اجتماع تهی با هر مجموعه‌ای روی آن مجموعه بی اثر است:
- اگر $A \subseteq B$ باشد، اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر یعنی B است:



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

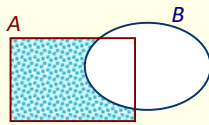
(نمونه: در دو مثال قبل‌تر، $B \subseteq A$ بوده و بنابراین $A \cup B = A$ شده است.)

مفهوم بعدی، اختلاف اعضای یک مجموعه با مجموعه‌ای دیگر را نشان می‌دهد:

تفاضل:

تفاضل مجموعه‌ی B از A را با $A - B$ نشان داده و آن:

شامل تمام عضوهایی است که در A هستند، ولی در B قرار ندارند.

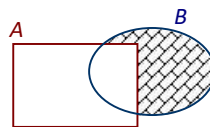


با نماد ریاضی می‌توان نوشت:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$

به صورت مشابه:

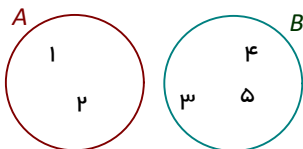
مجموعه‌ی $B - A$ نیز شامل اعضای است که در B بوده ولی در A نیستند.



نهایی کشوری - خرداد ۱۴۰۴

با توجه به نمودار ون داده شده:

الف) تساوی‌ها را کامل کنید.



$$A - B = \quad \quad \quad A \cap B =$$

ب) به جای \square یکی از نمادهای $(\in, \notin, \subset, \supset)$ را قرار دهید:

$$5 \square A \cup B$$

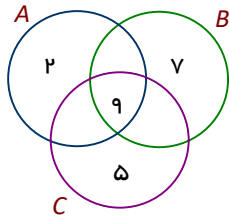


الف) عضوهایی که در A بوده و در B نباشند: $A - B = \{1, 2\}$

چون بین دو مجموعه عضو مشترک نداریم:

$$A \cap B = \emptyset$$

ب) واضح است که $5 \in A \cup B$.



مثال: با توجه به نمودار مقابل؛

الف) مجموعه‌ی زیر را با اعضایش مشخص کنید.

$$(A \cup B) - C =$$

ب) داخل مربع علامت مناسب (\in , \notin , \subseteq یا $\not\subseteq$) قرار دهید.

$$5 \square B \qquad \{9\} \square A$$

پاسخ ✓

الف) در شکل می‌پینید که:

$$A \cup B = \{2, 7, 9\} \quad \text{و} \quad C = \{5, 9\}$$

چون عضوهایی است که در $A \cup B$ باشند ولی در C نباشند:

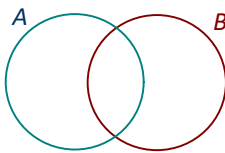
$$(A \cup B) - C = \{2, 7\}$$

ب) چون 9 عضو A هست، پس $\{9\} \subseteq A$ ولی عدد 5 در B قرار نداشته و می‌نویسیم: $5 \notin B$.



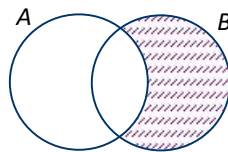
استان اصفهان - خرداد ۱۴۰۰

مجموعه‌ی $(B - A) \cap B$ را در نمودار روبه‌رو هاشور بزنید.



پاسخ ✓

پایه بین $B - A$ و B ، قسمت‌های مشترک را هاشور بزنیم که همان $B - A$ خواهد شد:



مثال: (از کتاب) مجموعه‌های $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$ و $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ و $W - \mathbb{N}$ را تشکیل دهید.

پاسخ ✓

تمام موارد په آسانی نوشته می‌شوند:

$$W - \mathbb{N} = \{0\} \qquad \mathbb{N} - \mathbb{Z} = \{\} = \emptyset \qquad \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$



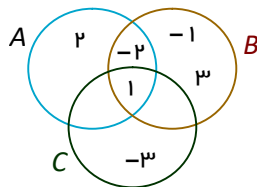
پای تخته

۵. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 5, 1\}$ ، مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

- $B \cap (A - B)$
- $(A - B) \cup (A \cap B)$



مثال: با توجه به نمودار ون مقابل:



الف) در جاهای خالی نماد مناسب قرار دهید:

$$1 \square C \quad \text{و} \quad \{2, -1\} \square B \cup C$$

ب) مجموعه‌ی بیان شده‌ی زیر را با نماد نوشته و مشخص کنید:

عضوهایی که در B بوده، ولی در هر دوی A و C نباشند.

پاسخ

الف) با توجه به مجموعه‌ها و عضوهای موجود در آن‌ها:

$$1 \in C \quad \text{و} \quad \{2, -1\} \not\subseteq B \cup C$$

ب) باید مجموعه‌ی B را در نظر گرفته و تمام عضوهای A و C هستند را حذف کنیم:

$$\begin{aligned} B - (A \cap C) &= \{-2, -1, 1, 3\} - (\{-2, 2, 1\} \cap \{1, -3\}) \\ &= \{-2, -1, 1, 3\} - \{1\} = \{-2, -1, 3\} \end{aligned}$$



با رسم نمودار مناسب، نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته

۶. در یک کلاس ۴۲ نفره، ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند و ۲۱ نفر عضو کتابخانه نیستند. اگر ۲ نفر هم ورزش نکنند و هم عضو کتابخانه نباشند، چند نفر هم ورزش می‌کنند و هم عضو کتابخانه هستند؟



جواب: ۵



پاسخ دهید (۳) ?

۱- اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 5\}$ و $C = \{3, 5, 1\}$ ، هر یک از مجموعه‌های زیر و تعداد زیرمجموعه‌های هر کدام را تعیین کنید:

- $B \cap (A - C)$
- $(B - C) \cup (C \cap A)$
- $(B - A) \cap (C - B)$
- $(A \cap B) - (B \cup C)$

۲- اگر بدانیم $A \subset B$ ، عبارات زیر را ساده کنید:

- $A - B$
- $A \cup B$
- $A \cap B$
- $\emptyset \cup B$
- $\emptyset - A$

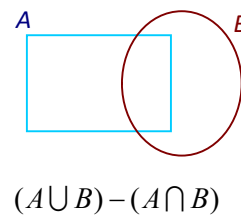
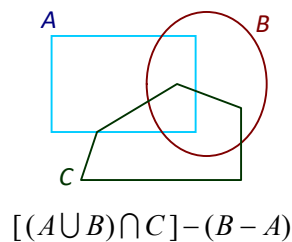
۳- فرض کنید داشته باشیم: $A = \{1, m, 3\}$ ، $B = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2 \leq n < 7\}$ و $C = \{4, 5, 6\}$. مقدار m را طوری بیابید که تساوی زیر درست باشد:

$$C = B - A$$

۴- آیا عبارت زیر همواره درست است؟

$$(A \cap B) \subset B \subset (A \cup B)$$

۵- مجموعه‌های داده شده‌ی زیر را در شکل‌های بالای هر کدام هاشور بزنید.



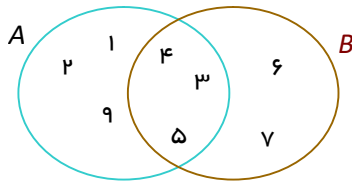
۶- شکل‌های مناسبی رسم کنید و مانند تمرین قبل، مجموعه‌های زیر را هاشور بزنید:

- $(A \cap B) - A$
- $A - (A \cap B)$
- $(B - C) \cup (A \cap B)$
- $(A \cup B) - C$

منتخب کتاب:

۱- مجموعه‌های $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 5, 7, 3, 9\}$ و $C = \{1, 7, 10, 11\}$ را در نظر بگیرید. سپس هر یک از مجموعه‌های زیر را با عضوهایشان مشخص کنید:

- (الف) $B \cup C$ (ب) $(A - C) \cup (B - C)$ (پ) $(A \cup B) - C$
 (ت) $\emptyset \cup C$ (ث) $A \cap \emptyset$

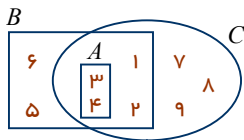


۲- با توجه به نمودار مقابل، عبارت‌های درست یا نادرست را مشخص کنید.

- (الف) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
 (ب) $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 2, 6\}$
 (پ) $n(A - B) = n(B - A)$

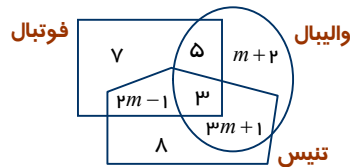


چالش (ویژه علاقمندان)



(الف) با توجه به شکل روبه‌رو، تعداد عضوهای مجموعه‌ی $(A - B) \cup (C - A)$ را تعیین کنید.

(ب) با توجه به نمودار زیر، اگر تعداد افرادی که تنها به یک ورزش علاقه دارند ۲۱ نفر باشد، چند نفر تنها به دو ورزش علاقه‌مند هستند؟



مجموعه‌ی $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ دارای ده عضو است و به همین دلیل می‌نویسیم:

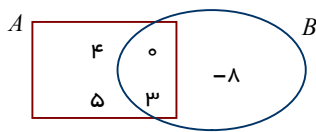
$$n(A) = 10$$

یعنی:

نماد $n(A)$ ، تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را نشان می‌دهد.

نهایی کشوری - خرداد ۱۴۰۳

با توجه به نمودار ون مقابل، جاهای خالی را کامل کنید.



الف) $A \cap B = \{ \quad \}$ ب) $B - A = \{ \quad \}$

پ) $n(A \cup B) =$

پاسخ

طبق آن چه گفته‌ایم:

$$A \cap B = \{0, 3\} \quad \text{و} \quad B - A = \{-8\}$$

$$\text{چون } A \cup B = \{4, 5, 0, 3, -8\} \text{ است، در نتیجه: } n(A \cup B) = 5$$



مفهوم احتمال و محاسبه‌ی آن را سال قبل دیده‌ایم. در این بخش، احتمال و روش محاسبه را با استفاده از مجموعه‌ها با دقت

بیشتری معرفی و بررسی خواهیم کرد.

چند مفهوم:

یک آزمایش شانس (یعنی: نتیجه قبل از انجام نامشخص باشد)، مثلاً پرتاب یک تاس را در نظر بگیرید:

مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن در انجام این آزمایش را با S نشان می‌دهیم. بنابراین در این مثال:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

مجموعه‌ی S «فضای نمونه‌ای» نام دارد.

در هر آزمایش، هدف تعیین احتمال برخی اتفاق‌های خاص مورد نظر (مطلوب) است. اعضای هر حالت مطلوب را داخل

یک مجموعه نوشته و به آن یک «پیشامد» یا «پیشامد تصادفی» گوئیم. در نتیجه:

«همه‌ی پیشامدها زیر مجموعه‌ی S هستند.»

محاسبه احتمال:

احتمال رخ دادن یک پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



برای نمونه؛

احتمال آمدن عددی اول در پرتاب یک تاس را حساب می‌کنیم (سؤال نهایی- خرداد ۱۴۰۳). تعداد کل حالت‌ها ۶ و حالت‌های مطلوب {۲, ۳, ۵} است. مقدار احتمال:

$$\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

نهایی کشوری - خرداد ۱۴۰۴

۵ کلاس پایه هفتم، ۴ کلاس پایه هشتم و ۳ کلاس پایه نهم از دبیرستان خلیج فارس در یک اردوی تفریحی شرکت کرده‌اند. قرار است تمامی کارهای اردو با مشارکت دانش‌آموزان به صورت قرعه‌کشی انجام شود. برای تعیین تیم برپا کننده چادرها، چقدر احتمال دارد یک کلاس پایه‌ی نهم انتخاب شود؟



پاسخ ✓

تمام کل انتخاب‌ها؛ $۱۲ = ۳ + ۴ + ۵$ و تعداد حالت‌های مطلوب ۳ است. بنابراین:

$$n(A) = ۳, n(S) = ۱۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$



مثال: در پرتاب یک تاس، احتمال این که عدد رو آمده اول باشد، برابر $\frac{۱}{۳}$ است. (درست □ نادرست □)

پاسخ ✓

نادرست است، چون:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 3, 5\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$



مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد ظاهر شده:

الف) مضرب ۵ باشد. ب) کوچک‌تر از ۵ باشد. پ) عدد اول دو رقمی باشد.

پاسخ ✓

مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر گرفته و توسط آن هر پیشامد را تعیین می‌کنیم:

الف) تنها عددی در S که مضرب ۵ باشد، خودش است:

$$A = \{5\} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

ب) اعداد کوچک‌تر از ۵ در S هستند:

$$B = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{6} \rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

پ) هیچ عددی در S دو رقمی نیست و بنابراین پیشامد این قسمت تهی است:

$$C = \{ \} \rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{0}{6} \rightarrow P(C) = 0$$



به صورت مشابه انجام دهید ...

پای تخته



۷. در ظرفی ۱۵ کارت با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ... و ۱۵ قرار دارد. یک کارت به صورت تصادفی (شانسی) از ظرف خارج می‌کنیم. مجموعه‌ی S را نوشته و توسط آن تعیین کنید احتمال آن که عدد روی کارت:
الف) دو رقمی باشد.
ب) بین ۵ و ۱۰ باشد.
پ) عدد اول فرد باشد.

جواب: $\frac{۲}{۵}$ و $\frac{۴}{۱۵}$ و $\frac{۱}{۳}$

گاهی با انجام آزمایش، دو نوع نتیجه یا حتی بیشتر ظاهر می‌شود؛ در چنین حالت‌هایی لازم است مجموعه‌ی S و پیشامدهای آن را به صورتی خاص و مناسب بنویسیم. به تفاوت فضای نمونه‌ای در دو مثال بعدی توجه کنید.

مثال: در پرتاب یک سکه، مجموعه‌ی S چنین نوشته می‌شود:

$$S = \{ \text{پ} , \text{ر} \}$$

که در آن «ر» نشان دهنده‌ی ظاهر شدن روی سکه و «پ» نشان دهنده‌ی پشت سکه است.



مثال: فرض کنید دو سکه را پرتاب کرده‌ایم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را محاسبه کنید.
الف) هر دو سکه رو بیاید. ب) فقط یک سکه پشت بیاید.

پاسخ

توجه کنید:

هر بار این آزمایش انجام شود، دو نتیجه مشاهده خواهد شد: **نتیجه‌ی سکه‌ی اول** و **نتیجه‌ی سکه‌ی دوم**. فرض کنید در سکه‌ی اول رو و در سکه‌ی دوم پشت ظاهر شده باشد؛ این نتیجه را در S به صورت زیر نشان خواهیم داد:

(پ , ر)

بنابراین تمام حالات ممکن به صورت زیر S را تشکیل می‌دهند:

$$S = \{ (ر, ر) , (ر, پ) , (پ, ر) , (پ, پ) \} \rightarrow n(S) = ۴$$

الف) حالتی که هر دو سکه رو آمده باشد، فقط یک حالت است؛

$$A = \{ (ر, ر) \} \rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{۴}$$

ب) با توجه به S ، پیشامد آن که فقط یک سکه پشت بیاید را می‌نویسیم:

$$B = \{(ر, ر), (ر, پ)\} \rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{4} \rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$



نمودار درختی:

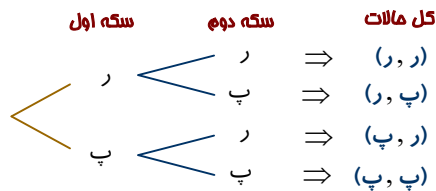
روشی آسان برای نوشتن مجموعه‌ی S هنگامی که اعضای آن دو یا چند نتیجه را نشان می‌دهند، استفاده از «نمودار درختی» به صورت زیر است. برای نمونه، وقتی دو سکه پرتاب می‌شود:

- سکه‌ی اول می‌تواند رو یا پشت ظاهر شود:

سکه اول



در هر یک از دو حالتی که برای سکه‌ی اول رخ می‌دهد، سکه‌ی دوم ممکن است رو یا پشت ظاهر گردد:



می‌بینید که:

حرکت از ریشه به سمت برگ‌ها (از چپ به راست)، تمام عضوهای S یا پیشامدهای مورد نظر را مشخص می‌کند.

مثال: یک سکه و یک تاس را هم‌زمان پرتاب می‌کنیم.

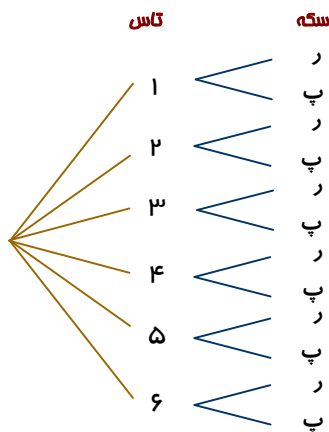
الف) تعداد حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال آن که سکه رو و تاس عدد فرد ظاهر شود چقدر است؟

پ) احتمال آن که سکه پشت بیاید چقدر است؟

پاسخ ✓

الف) می‌توانید برای نوشتن عضوهای S از نمودار درختی استفاده کنید (البته استفاده از نمودار درختی برای فهم ساده‌تر بوده و اجباری نیست):



$$S = \{(1, ر), (1, پ), (2, ر), (2, پ), (3, ر), (3, پ), (4, ر), (4, پ), (5, ر), (5, پ), (6, ر), (6, پ)\}$$

می‌بینید که S دارای ۱۲ عضو است؛ یعنی: $n(S) = 12$

ب) با نگاه به مجموعه‌ی S حالت‌های مطلوب این قسمت را می‌نویسیم:

$$A = \{(1, ر), (3, ر), (5, ر)\}$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

پ) توجه کنید که در این قسمت برای تاس هر عددی می‌تواند ظاهر شود، ولی سکه فقط پشت قبول است:

$$B = \{(1, \text{پ}), (2, \text{پ}), (3, \text{پ}), (4, \text{پ}), (5, \text{پ}), (6, \text{پ})\}$$

در نتیجه:

$$P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



نوبت شماست . . .

پای تخته

۸. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مجموعه‌ی S را تشکیل داده و احتمال موارد زیر را بیابید:

الف) هر دو عدد ظاهر شده فرد باشند.

ب) جمع دو عدد ظاهر شده کوچک‌تر از ۶ باشد.

پ) عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک‌تر باشد.

جواب: به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{5}{18}$ و $\frac{5}{12}$

آذربایجان شرقی - خرداد ۱۴۰۰

اگر تاسی را دو بار بیندازیم، چقدر احتمال دارد هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند؟

پاسخ

S دارای $6 \times 6 = 36$ عضو است. حالات مطلوب:

$$A = \{(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)\}$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$



پاسخ دهید (۴) ?

۱- از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 16\}$ یک عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد:

الف) عدد انتخاب شده مضرب پنج باشد.

ب) عدد انتخاب شده دو رقمی باشد.

۲- خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) با رسم نمودار درختی، مجموعه‌ی S مربوط به جنسیت فرزندان را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد که فقط یک فرزند دختر باشد.



پ) چقدر احتمال دارد کہ لاقول یک فرزند دختر باشد.

ت) چقدر احتمال دارد کہ تعداد دخترها از تعداد پسرها بیشتر باشد.

۳- دو تاس را با ہم پرتاب می کنیم.

الف) مجموعہی S را بنویسید.

ب) چقدر احتمال دارد ہر دو تاس عدد اول بیایند.

پ) چقدر احتمال دارد عدد تاس اول از عدد تاس دوم کوچک تر بیاید.

ت) چقدر احتمال دارد مجموع دو عدد تاسها برابر ۹ باشد.

منتفب کتاب:

۱- در جعبہای ۳ مہرہی قرمز، ۴ مہرہی آبی و ۵ مہرہی سبز وجود دارد. اگر یک مہرہ را تصادفی از این جعبہ خارج کنیم، چقدر احتمال دارد:

الف) این مہرہ آبی باشد. ب) این مہرہ سبز نباشد. پ) این مہرہ قرمز یا سبز باشد.

۲- اگر تاسی را دو بار بیندازیم (یا دو تاس آبی و قرمز را با ہم بیندازیم)، چقدر احتمال دارد:

الف) ہر دو بار، عدد اول رو شود. ب) دو عدد رو شدہ، مثل ہم باشد.

پ) دو عدد رو شدہ، ضرب ۳ باشند. ت) مجموع دو عدد ۷ باشد.



چالش (ویژہ علاقمندان)

۱- اگر $P(A) = 0/2$ و $n(A) = 8$ و $n(B) = 5$ باشد، مقدار $P(B)$ را حساب کنید.

۲- اتاقی داریم کہ کف آن از کاشیهای مربع شکل پوشیدہ شدہ است. طول اتاق شامل ۸ و عرض آن شامل ۵ کاشی است. اگر یکی از کاشیها را بہ طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن کہ این کاشی، کاشی کنج یا کنارہای اتاق باشد، را حساب کنید.



پاسخنامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

۱- فقط موارد (الف) و (ت) تابع و اعضای آنها مشخص هستند.

ولی در قسمت‌های (ب) و (پ) و (ث):

اعضاء آنها به سلیقه افراد بستگی دارد.

۲- در مورد مجموعه‌ی A ، ابتدا معادله را حل می‌کنیم تا آن مشخص گردد:

$$-3x - 5 = -2 \rightarrow -3x = -2 + 5 \rightarrow -3x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{-3} = -1$$

پس $A = \{-1\}$ بوده و دارای دو زیرمجموعه‌ی \emptyset و $\{-1\}$ است.

زیر مجموعه‌های $B = \{1, 2, \{3\}\}$ را از عضوهای کمتر به بیشتر می‌نویسیم:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{3\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{3\}\}, \{2, \{3\}\}, \{1, 2, \{3\}\}$$

مشاهده می‌کنید که مجموعه‌ی B دارای ۳ عضو و دارای ۸ زیر مجموعه است.

۳- الف) با کمی توجه مشاهده می‌کنید که اعضای مجموعه‌ی داده شده مجذور عددهای حسابی هستند:

$$0, 1, 4, 9, 16, \dots \rightarrow 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^2 \mid k \in \mathbb{W}\}$$

ب) توجه کنید که اگر عددهای $1, 4, 9, 16, \dots$ یک واحد کم کنیم، عددهای $0, 3, 8, 15, 24, \dots$ به دست می‌آیند:

$$0, 3, 8, 15, 24, \dots \rightarrow 1-1, 4-1, 9-1, 16-1, 25-1, \dots \Rightarrow 1^2-1, 2^2-1, 3^2-1, 4^2-1, \dots$$

در نتیجه این مجموعه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{k^2 - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

۴- عددهای صحیح در محدوده‌ی عبارتند از $-2, -1, 0$ و صفر. در نتیجه مجذورهای آنها مجموعه را تشکیل می‌دهند:

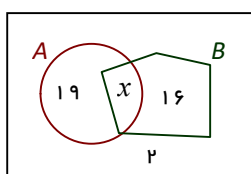
$$A = \{0^2, (-1)^2, (-2)^2\} \Rightarrow A = \{0, 1, 4\}$$

۵- مورد اول: با رعایت ترتیب (ابتدا داخل پراتنز را می‌نویسیم):

$$B \cap (A - B) = \{3, 5, 1\} \cap (\{1, 2, 3\} - \{3, 5, 1\}) = \{3, 5, 1\} \cap \{2\} = \emptyset$$

مورد دوم: مشابه قسمت قبل:

$$(A - B) \cup (A \cap B) = (\{1, 2, 3\} - \{3, 5, 1\}) - (\{1, 2, 3\} \cap \{3, 5, 1\}) \\ = \{2\} - \{1, 3\} = \{2\}$$



۶- کل افراد کلاس را در یک مستطیل تصور کرده و «افرادی که ورزش می‌کنند» و

«افرادی که عضو کتابخانه هستند» را به ترتیب با A و B نشان می‌دهیم. اکنون در

شکل مقابل، تعداد افراد هر بخش را در شکل می‌نویسیم:



- دو نفر که ورزش نمی‌کنند و عضو کتابخانه نیستند را خارج دو مجموعه قرار می‌دهیم. پس ۴۰ نفر داخل این دو مجموعه جای دارند.
- چون ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند، پس ۱۶ نفر (جدای از ۲ نفر قبلی) خارج A قرار دارند.
- همچنین: چون ۲۱ نفر عضو کتابخانه نیستند، پس ۱۹ نفر هم خارج B قرار می‌گیرند.
- تعداد افراد مشترک را هم با x نشان می‌دهیم.

$$19 + x + 16 + 2 = 42 \rightarrow x + 37 = 42 \Rightarrow x = 42 - 37 = 5$$

۷- مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن عبارت است از:

$$S = \{1, 2, 3, \dots, 14, 15\} \rightarrow n(S) = 15$$

الف) عددهای دو رقمی موجود در S را می‌نویسیم:

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\} \rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow P(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

ب) عددهای بین ۵ و ۱۰ در S را می‌نویسیم:

$$B = \{6, 7, 8, 9\} \rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{15}$$

پ) مشابه دو قسمت قبل، پیشامد را نوشته و احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$C = \{3, 5, 7, 11, 13\} \rightarrow n(C) = 5 \Rightarrow P(C) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

۸- برای درک بهتر و یا اگر لازم است، از نمودار درختی استفاده کنید؛ مجموعه‌ی تمام حالت‌ها به صورت زیر است:

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), (3,1), (3,2), \dots, (6,6)\} \rightarrow n(S) = 36$$

توجه کنید یک عضو S مانند $(2,1)$ به این معنی است که تاس اول عدد ۲ و تاس دوم عدد ۱ آمده است.

الف) پیشامد هر دو عدد فرد به صورت زیر است:

$$A = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\} \rightarrow n(A) = 9$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ب) تمام عضوهایی که جمع دو عدد آن‌ها کمتر از ۶ است را می‌نویسیم:

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\} \rightarrow n(B) = 10$$

در نتیجه:

$$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

پ) تمام عضوهایی از S که عدد اول از عدد دوم کمتر است را می‌نویسیم:

$$C = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\} \\ \rightarrow n(C) = 15$$

$$P(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \quad \text{در نتیجه:}$$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل هوش کلامی)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴