



ریاضیات ویژه تیزہوشان

ریاضیہ نمبر

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics





گروه علمی درس آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش آموزان کشور (نهایی ۲۰)



کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

۵:

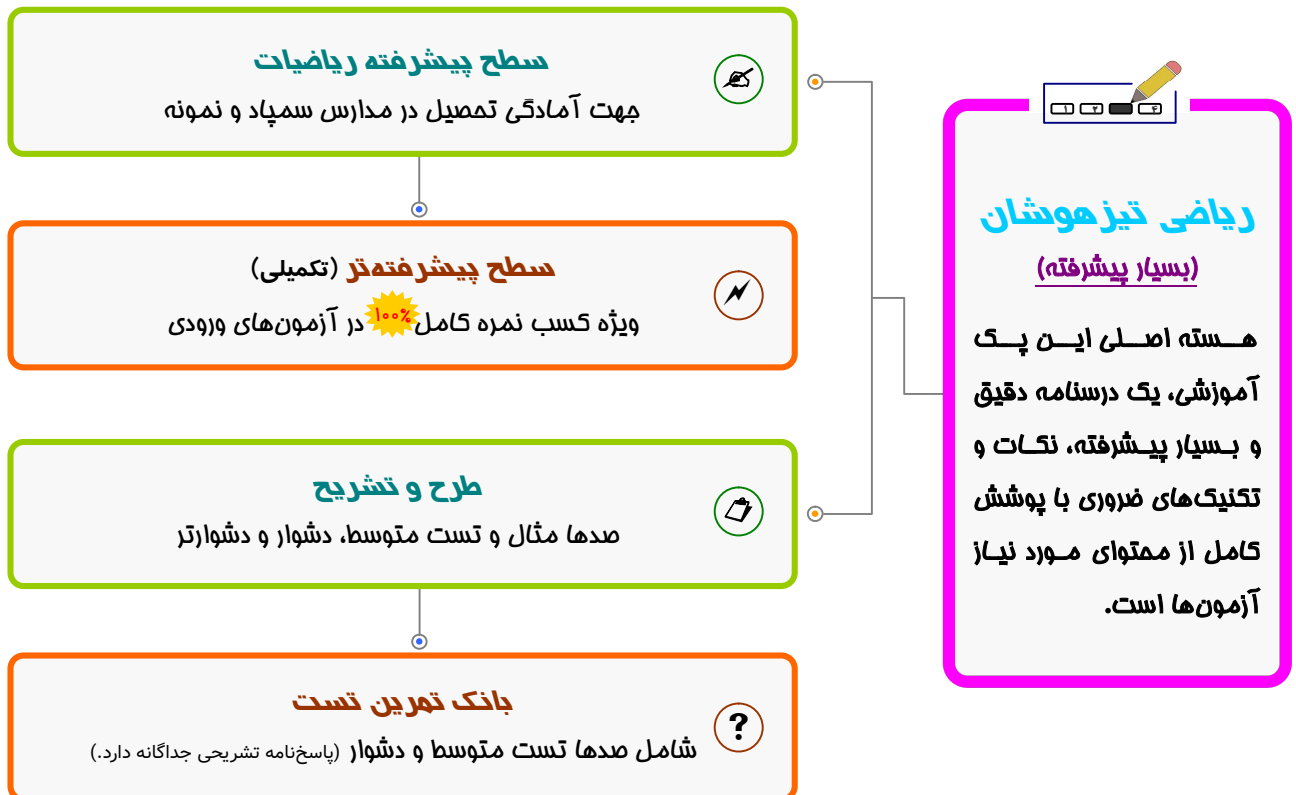
آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

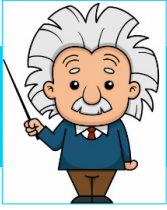
درس آموز؛ (منحصر به فرد)

جزئیات این مجموعه



پوشش آخرین آزمون‌های سمپاد و نمونه کشوری

Up to date

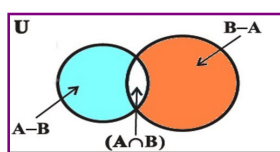


«فهرست»

۲	مجموعه و احتمال جبر مجموعه‌ها، نمودارها و کاربرد در احتمال	۱
۴۸	اعداد موقی اعداد گویا، گنگ و نمایش آن‌ها، قدر مطلق	۲
۹۷	استدلال در هندسه استدلال و اثبات در هندسه، هم‌نهستی و تشابه	۳
۱۲۸	توان و ریشه‌گیری توان و محاسبات، ریشه، رادیکال و محاسبات	۴

۵	عبارت جبری و اتحاد چندجمله‌ای، اتحاد و تجزیه، نامعادلات	۱۸۱
۶	خط و معادلات رابطه‌های خطی، معادله خط، دستگاه معادلات	۲۲۴
۷	عبارت‌های گویا ساده سازی، اعمال چهارگانه، تقسیم چندجمله‌ای	۲۵۸
۸	مساحت و حجم بررسی مکعب مستطیل، منشور و استوانه، هرم، کره	۲۸۳

ریاضی نهم تیز هوشان



مجموعه و احتمال

صفحه	فهرست
۳	معرفی مجموعه
۱۰	زیر مجموعه‌ها
۱۷	جبر مجموعه‌ها
۲۶	مجموعه و احتمال
۳۰	قدری پیشرفته‌تر
۴۶	سؤالات چهار گزینه‌ای



معرفی مجموعه

یک بیان واضح درباره‌ی عددها یا اشیاء، معمولاً یک مجموعه تشکیل می‌دهد. برای نمونه: مجموعه‌ی «مقسوم علیه‌های مثبت عدد ۱۰» به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M = \{1, 2, 5, 10\}$$

نمایش مجموعه:

چنان که در بالا هم می‌بینید، اعضاها را بین دو آکولاد «{ }» و «{ }» نوشته و بین آن‌ها از نماد «،» استفاده می‌کنیم. برای نمونه:

مجموعه‌ی $\{1, 2, 2\}$ دو عضو، مجموعه‌ی $\{1, \{2\}, \{1, 2\}\}$ سه عضو و $\{\{2, \{1\}\}, \{3, 4\}\}$ فقط یک عضو دارد. (چرا؟)

در حالت خاص، مجموعه‌های عددی معروف را با نماد اختصاصی هر کدام در ذهن داشته باشید:

- اعداد طبیعی : $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد مسابی : $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد صمیع : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- اعداد اول : $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$
- اعداد طبیعی فرد : $O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ • اعداد طبیعی زوج : $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

برخی عبارت‌ها مجموعه معرفی نمی‌کنند:

نکته ۱

برای آن که تعدادی شیء یا عدد تشکیل مجموعه دهند لازم است:

این اعداد یا اشیاء «مشفص» یا «مُصَن» باشند.

یعنی:

در مورد هر شیء یا عدد دلفوا، دقیقاً معلوم باشد که عضو آن مجموعه هست یا فیر.

بویژه لازم است:

تعیین اعضای مجموعه به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی نداشته باشد.

نمونه‌هایی ببینید:

(الف) عبارت: «اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۶» یک مجموعه معرفی می‌کند؛ زیرا:

دقیقاً عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ شرط داده شده را داشته و اعضای مجموعه هستند.

(ب) عبارت: «پنج عدد طبیعی» یک مجموعه معرفی نمی‌کند؛ زیرا:

دقیقاً معلوم نیست که کدام عددهای طبیعی جزء این پنج عدد بوده و کدام‌ها جزء آن‌ها قرار ندارند.



❖ کدام عبارت یک مجموعه مشخص نمی‌کند؟

- 1 سه نفر اول کنکور تجربی سال ۱۴۰۳
2 چهار عدد طبیعی یک رقمی فرد
3 چهار عدد طبیعی یک رقمی زوج
4 چهار عدد طبیعی یک رقمی اول

گزینه ۲

عددهای طبیعی یک رقمی فرد، پنج مورد هستند:

۱, ۳, ۵, ۷, ۹

پس دقیقاً نمی‌توان گفت کدام چهار عدد باید انتخاب شده و در مجموعه قرار گیرند.

❖ کدام جمله‌ی زیر یک مجموعه مشخص می‌کند؟

- 1 داستان‌های بلند
2 ده هنریشه معروف دنیا
3 اعداد اول زوج
4 رنگ‌های زیبا

گزینه ۳

فقط اعداد اول زوج «معین» هستند:

مجموعه است: $\{۲\}$

سایر موارد به نظر و سلیقه‌ی افراد بستگی دارند.

نکته ۲

به دو مورد زیر توجه کنید:

- ترتیب نوشتن اعضای مجموعه اهمیتی ندارد.
- اعضای یک مجموعه را متمایز در نظر می‌گیریم؛ یعنی:

اگر مجموعه عضو تکراری داشته باشد، فقط یک‌بار شمرده شده و تکرار آن را حذف می‌کنیم.

بنابراین:

- مجموعه‌های $\{a, b, c\}$ و $\{c, a, b\}$ یکسان هستند.
- مجموعه‌ی $D = \{۳, ۵, ۳\}$ دو عضوی بوده و نمایش معمولی آن $D = \{۳, ۵\}$ است.

معرفی نماد:

تعداد عضوهای یک مجموعه چون A را با $n(A)$ (و گاهی $|A|$) نشان می‌دهیم.

❖ مجموعه‌ی $A = \{۱, ۳, ۳, ۳, ۵, ۵, ۵, ۵, ۵, \dots, ۱۱\}$ که در آن هر عدد به تعداد خودش نوشته شده است، چند عضو دارد؟

- 1 نمی‌توان مشخص کرد. 2 ۱۱ 3 ۶ 4 ۳۶



گزینه ۳

با حذف عددهای تکراری، خواهیم داشت:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \Rightarrow n(A) = 6$$

--- ❓ ---

❓ مجموعه $A = \{a, \{a\}, \{a, a\}, \{a, a, a\}, \dots\}$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ بی‌شمار

گزینه ۲

چون تمام مجموعه‌های $\{a, a\}$ و $\{a, a, a\}$ و ... با $\{a\}$ برابر هستند، مجموعه‌ی A فقط دو عضو دارد:

$$A = \{a, \{a\}\}$$

--- ❓ ---

ممکن است مجموعه هیچ عضوی نداشته باشد، مانند: مجموعه عددهای طبیعی کمتر از صفر.

تُهی:

مجموعه‌ی «تُهی» هیچ عضوی ندارد و آن را با \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید:

مجموعه‌ی $\{\emptyset\}$ خود دارای یک عضو \emptyset است، پس آن با مجموعه‌ی تَهی متفاوت است.

❓ کدام یک از مجموعه‌های زیر، تَهی است؟

- ۱ مجموعه اعداد اول کوچک‌تر از ۳ ۲ مجموعه اعداد اول بین ۲۴ و ۲۸
 ۳ $\{0\}$ ۴ $\{\emptyset\}$

گزینه ۲

چون بین ۲۴ و ۲۸ فقط عددهای طبیعی ۲۵، ۲۶ و ۲۷ قرار دارند که هیچ‌کدام عدد اول نیستند. پس:

این مجموعه هیچ عضوی نداشته و تَهی است.

--- ❓ ---

در ادامه، دو روش دیگر برای نمایش مجموعه‌ها می‌آوریم:

نکته ۳

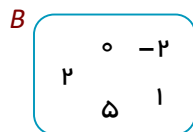
یک مجموعه را می‌توان به صورت تصویری هم نمایش داد:

- یک شکل هندسی، مثلاً چند ضلعی یا دایره رسم می‌کنیم.
- اعضای مجموعه را داخل آن می‌نویسیم.

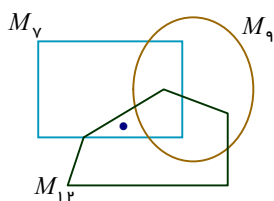
به چنین نمایشی از یک مجموعه، «نمودار ون» گفته می‌شود.



برای نمونه؛



شکل مقابل، نمایش مجموعه $B = \{-2, 0, 1, 2, 5\}$ توسط نمودار ون است.



در نمودار زیر، مجموعه‌های M_7 و M_9 و M_{12} ، به ترتیب مضرب‌های ۷ و مضرب-های ۹ و مضرب‌های ۱۲ را مشخص می‌کنند. نقطه‌ای که در شکل نشان داده شده است، نمایانگر کدام یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

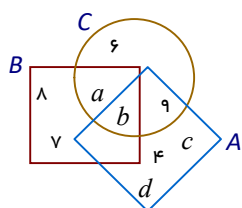
- ۱ ۶۳ ۲ ۱۹ ۳ ۲۵۲ ۴ ۱۶۸

گزینه ۴

نقطه در M_7 و M_{12} قرار داشته، ولی در M_9 قرار ندارد. یعنی؛

عدد مربوطه باید بر ۷ و ۱۲ بخش‌پذیر بوده ولی بر ۹ بخش‌پذیر نباشد.

فقط عدد ۱۶۸ در بین گزینه‌ها این خاصیت را دارد.



عددهای طبیعی یک رقمی، طبق شکل روبه‌رو عضوهای سه مجموعه A و B و C را تشکیل می‌دهند. اگر مجموع عضوهای سه مجموعه با هم یکسان باشد، بیشترین مقدار $c + 2d - b$ کدام است؟

- ۱ ۰ ۲ ۴ ۳ ۲ ۴ ۳

گزینه ۳

عضوهای ۱، ۲، ۳ و ۵ نامشخص هستند. با توجه به این که b در هر سه مجموعه مشترک است، با کنار گذاشتن آن؛
 (۱) در مقایسه بین A و C ، باید داشته باشیم؛

$$c + d + 4 = a + 6 \Rightarrow c + d = a + 2$$

(۲) در مقایسه بین A و B نیز همین تساوی $c + d = a + 2$ باید برقرار شود.

با توجه به چهار عدد اولیه، c و d فقط می‌توانند ۱ و ۳ بوده، $a = 2$ و در نتیجه باید $b = 5$ باشد. بنابراین برای عبارت $c + 2d - b$ دو مقدار قابل محاسبه است که بیشترین عدد هنگامی حاصل می‌شود که $c = 1$ و $d = 3$ انتخاب شوند؛

$$c + 2d - b = 1 + 2(3) - 5 = 2$$

مهم‌ترین روش نمایش مجموعه‌ها به صورت زیر است:

نکته ۴

نمایش نمادین:

مجموعه‌ها را می‌توان با علائم ریاضی به صورت کوتاه معرفی کرد. برای نمونه:
 اعداد طبیعی زوج به صورت زیر هستند:

$$2, 4, 6, \dots \Rightarrow 2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, \dots$$

پس مجموعه‌ی E شامل این عددها چنین است:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$



به صورت مشابه، مجموعه اعداد طبیعی فرد:

$$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

نمایش معمولی مجموعه‌ی $\left\{ \frac{2m+1}{3} \mid \frac{m}{2} \in \mathbb{N}, m \leq 4 \right\}$ کدام است؟

- 1 $\{3, 5\}$ 2 $\left\{ \frac{1}{3}, 3, \frac{5}{3} \right\}$ 3 $\left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 3, \frac{5}{3} \right\}$ 4 $\left\{ \frac{1}{3}, 3 \right\}$

گزینه 1

اولاً: فقط برای $m = 2$ و $m = 4$ شرط $\frac{m}{2} \in \mathbb{N}$ برقرار خواهد بود.

ثانیاً: با قرار دادن این دو عدد در عبارت $\frac{2m+1}{3}$ عضوهای مجموعه مشخص می‌شوند:

$$m = 2: \frac{2(2)+1}{3} = \frac{5}{3} \qquad m = 4: \frac{2(4)+1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

--- ---

اگر $A = \{-x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{-x^3 \mid x \in A\}$ باشد، کدام گزینه مجموعه‌ی B را نشان می‌دهد؟

- 1 $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 2 $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$ 3 $\{-1, 0, 27\}$ 4 $\{-3, 0, 1\}$

گزینه 3

پایده:

عددهای صحیح $-2, -1, 0, 1, 2$ را در عبارت $-x^2 + 1$ جای x قرار دهیم تا عضوهای A مشخص گردند. سپس:

عدد به دست آمده را در عبارت $-x^3$ جای x قرار دهیم تا عضوهای B مشخص گردند:

$$x = -2: -(-2)^2 + 1 = -4 + 1 = -3 \in A \Rightarrow -(-3)^3 = -(-27) = 27 \in B$$

فقط گزینه‌ی سوم عدد 27 را دارد و می‌تواند جواب درست باشد.

--- ---

نمایش ریاضی مجموعه‌ی $\{-1, -4, 9, 16, -25, -36, \dots\}$ کدام است؟

- 1 $\{(-1)^x x \mid x \in \mathbb{N}\}$ 2 $\{(-x)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$
 3 $\{(-1)^{-2} x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ 4 $\{(-1)^{\frac{x(x-1)}{2}} x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

گزینه 3

با یک بررسی ساده می‌بینید که گزینه‌ی اول و دوم نمی‌توانند جواب باشند. بررسی گزینه‌ی سوم:

$$x = 1: (-1)^{\frac{1 \times 1}{2}} (1)^2 = (-1)^1 \times 1 = -1$$

$$x = 2: (-1)^{\frac{2 \times 1}{2}} (2)^2 = (-1)^1 \times 4 = -4$$

$$x = 3: (-1)^{\frac{3 \times 2}{2}} (3)^2 = (-1)^3 \times 9 = 9$$

با ادامه‌ی این روند، سایر عضوهای تولید شده با عضوهای مجموعه‌ی اولیه مطابقت دارد.



در پایان این بخش، به دو مفهوم درباره‌ی مجموعه‌ها توجه کنید.

نکته ۵

مجموعه‌ی $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ را در نظر بگیرید:

▪ اگر هر دو عضو آن را با هم جمع کنیم، حاصل داخل خود \mathbb{N} باقی می‌ماند. برای همین گوئیم:

مجموعه‌ی \mathbb{N} نسبت به عمل جمع بسته است.

▪ اگر دو عضو از \mathbb{N} را از هم تفریق کنیم، ممکن است حاصل در \mathbb{N} قرار نداشته باشد. مثلاً

$$3, 7 \in \mathbb{N}, \quad 3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$$

پس \mathbb{N} نسبت به تفریق بسته نیست.

کدام عبارت زیر درست است؟

- 1 مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ نسبت به عمل جمع بسته است.
- 2 مجموعه‌ی $\{2x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ نسبت به عمل جمع بسته است.
- 3 مجموعه‌ی $\{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است.
- 4 مجموعه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ نسبت به عمل ضرب بسته نیست.

گزینه ۳

اگر دو عضو مختلف 2^m و 2^n را از مجموعه‌ی $\{2^x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ بگیرید، طبق قانون ضرب:

$$2^n \times 2^m = 2^{n+m}, \quad n + m \in \mathbb{Z}$$

پس حاصل در مجموعه‌ی اولیه جای خواهد داشت. (سؤال: چرا گزینه اول صحیح نیست؟)



کدام مجموعه نسبت به هر یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

- 1 مجموعه‌ی اعداد گویا (\mathbb{Q})
- 2 مجموعه‌ی اعداد صحیح (\mathbb{Z})
- 3 مجموعه‌ی اعداد گویا به جز صفر ($\mathbb{Q} - \{0\}$)
- 4 مجموعه‌ی اعداد حسابی (\mathbb{W})

گزینه ۱

نادرست بودن گزینه‌های ۲ و ۴ پدیده‌ی است، چون نسبت به تقسیم بسته نیستند. گزینه‌ی ۳ هم نادرست است، چون حاصل جمع دو عدد گویای غیر صفر و قرینه برابر صفر شده و در $\mathbb{Q} - \{0\}$ قرار ندارد.

پس فقط مورد اول صحیح خواهد بود.

توجه کنید:

در \mathbb{Q} ، تقسیم یک عدد گویا بر صفر هم به ذهن می‌رسد؛ ولی تقسیم قابل انجام نیست و بنابراین حاصل تقسیم دو عدد از \mathbb{Q} هیچ‌گاه خارج از آن قرار نخواهد گرفت. (یعنی: نتیجه‌ی تقسیم دو عدد گویا الزاماً در \mathbb{Q} قرار دارد.)





نکته ۶

مجموعه بی پایان:

- یک مجموعه بی پایان یا «نامتناهی» است، هرگاه تعداد عضوهای آن یک عدد نشود. مثلاً:
- \mathbb{N} بی پایان است.
 - مجموعه عددهای گویای بین ۰ و ۱ بی پایان است، چون لاقبل بی شمار عدد زیر در آن قرار دارند:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

توجه کنید:

سایر مجموعه‌ها با پایان یا «متناهی» هستند. (به ویژه: \emptyset تعداد ۰ عضو دارد و متناهی است.)

کدام مجموعه‌ی زیر با پایان است؟

② $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 \geq n^2\}$

① $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq 2^n\}$

④ $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \geq 2^n\}$

③ $\{n \in \mathbb{N} \mid n^3 \leq 2^n\}$

گزینه ۴

به آسانی و با عدد دادن به n می‌بینید که شرط $n^2 \geq 2^n$ فقط برای عددهای ۲ و ۳ و ۴ برقرار است. پس مجموعه‌ی گزینه‌ی چهارم به صورت:

$$\{2, 3, 4\}$$

پوده و با پایان است.

نکته ۷

برخی خواص:

- موارد زیر به سادگی با توجه به مفاهیم مربوطه قابل بیان هستند:
- وقتی یک مجموعه متناهی است، هر زیرمجموعه از آن نیز متناهی است. (مفهوم زیرمجموعه در بخش بعد!)
 - وقتی یک مجموعه نامتناهی است، هر مجموعه شامل آن نیز نامتناهی است.
- سایر حالت‌ها حکم کلی نداشته و نیاز به بررسی دارند.



۲

زیر مجموعه‌ها



با استفاده از مفهوم زیر می‌توان دو مجموعه را با هم مقایسه کرد:

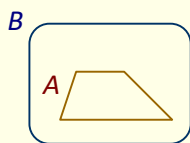
نکته ۸

هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی A در B هم قرار داشته باشد، یعنی:

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

در این صورت A «زیر مجموعه» B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$

اگر این شرط برقرار نباشد، A زیر مجموعه‌ی B نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.



(توجه: علامت‌های \subseteq و \subset یک معنی دارند!)

نمونه‌هایی ببینید:

۱) تمام زیرمجموعه‌های $A = \{2, \{2\}\}$ چهار مورد زیر هستند:

$$\emptyset, \{2\}, \{\{2\}\}, A$$

۲) اگر $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ باشد، عبارت‌های $\{1, 2\} \subseteq A$ ، $\{1, 2\} \in A$ و $\{1\} \subseteq A$ هر سه درست بوده، ولی $\{1\} \in A$ نادرست است.

❖ اگر $A = \{a, \{1, 2a+b\}\}$ زیر مجموعه‌ی $B = \{3, 2a+1, \{-a, 0\}\}$ باشد، مقدار b کدام است؟

۲ ④

۱ ③

-۶ ②

-۹ ①

گزینه ۴

چون $\{1, 2a+b\}$ در A هست، باید عضو B هم باشد:

$$\{1, 2a+b\} = \{-a, 0\} \rightarrow \begin{cases} -a=1 \rightarrow a=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \rightarrow 2(-1)+b=0 \Rightarrow b=2$$

--- ❖ ---

❖ k عددی ثابت و $A = \{k+x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$ است. اگر داشته باشیم $\{6, 9\} \subseteq A$ ، عدد k عضو کدام مجموعه است؟

$\{4x+3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ④

$\{3x-4 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ③

$\{2x+6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ②

$\{5x+1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ①

گزینه ۳

عضوهای مجموعه‌ی A به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$k+9, k+4, k+1, k, k+1, k+4, \dots$$

با توجه به این که ۶ و ۹ سه واحد اختلاف دارند، فقط باید داشته باشیم:

$$k+1=6 \Rightarrow k=5$$



زیرمجموعه‌های بدیهی:

نکته ۹

برای هر مجموعه چون A همیشه:

- $A \subseteq A$: یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه‌ی خودش است.
- $\emptyset \subseteq A$: یعنی تهی زیرمجموعه‌ی تمام مجموعه‌ها است.

توجه کنید:

به زیرمجموعه‌های A غیر از خودش، زیرمجموعه‌ی «سنگره» یا «محفص» گویند.

❖ اگر $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ باشد، آنگاه چه تعداد از رابطه‌های زیر درست‌اند؟

- | | | | |
|-----------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| $\{\emptyset\} \subseteq A$ | $\emptyset \subseteq A$ | $\{\{\emptyset\}\} \in A$ | $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ |
| ۴ ④ | ۳ ③ | ۲ ② | ۱ ① |

گزینه ۴

توجه کنید:

- مجموعه‌ی A دارای سه عضو \emptyset و $\{\emptyset\}$ و $\{\{\emptyset\}\}$ است. بررسی تمام رابطه‌ها (از سمت چپ به صورت دقیق):
- چون $\emptyset \in A$ است، پس رابطه‌ی $\{\emptyset\} \subseteq A$ درست است.
 - می‌دانیم رابطه‌ی $\emptyset \subseteq A$ همیشه درست است.
 - عضو $\{\{\emptyset\}\}$ در A هست و در نتیجه رابطه‌ی $\{\{\emptyset\}\} \in A$ درست است.
 - چون $\{\emptyset\} \in A$ است، پس رابطه‌ی $\{\{\emptyset\}\} \subseteq A$ درست است.
- پس هر چهار مورد صحیح است.



نکته ۱۰

همان‌طور که دیدیم، یک مجموعه‌ی ۲ عضوی تعداد ۴ زیرمجموعه داشت.

در کل:

اگر یک مجموعه دارای n عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n است.

نمونه‌ای ببینید:

در یک مجموعه‌ی پنج عضوی؛

① تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر $2^5 = 32$ است.

② یکی از این ۳۲ زیرمجموعه، خودش است. پس تعداد زیرمجموعه‌های محض آن $32 - 1 = 31$ بوده و تعداد زیرمجموعه‌های محض و ناتهی برابر است با:



$$3^2 - 2 = 3^0$$

مثال: مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ را در نظر بگیرید.

الف) چند زیر مجموعه‌ی یک عضوی دارد؟

ب) چند زیرمجموعه شامل عددهای زوج دارد؟

پ) چند زیر مجموعه دارد که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ باشد؟

پاسخ ✓

الف) به تعداد عضوهایش، زیرمجموعه‌ی یک عضوی دارد:

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

ب) برای این که عضوهای زیر مجموعه زوج باشند، باید زیر مجموعه‌ی $\{2, 4, 6\}$ باشند که چون سه عضو دارد:

$$2^3 = 8$$

(جواب ۷ است، چون یکی از این هشت مجموعه، تهی است که قابل قبول نیست).

پ) دقیق توبه کنید:

زیر مجموعه‌ای که بزرگ‌ترین عضو آن ۵ باشد، در واقع یک زیر مجموعه از $\{1, 2, 3, 4\}$ بوده که عضو ۵ را هم در آن قرار داده‌ایم. چون $\{1, 2, 3, 4\}$ دارای چهار عضو است:

$$2^4 = 16$$

مجموعه‌ی A دارای ۲۵۵ زیرمجموعه‌ی محض است. این مجموعه چند عضو دارد؟

۸ **4**

۲۵۶ **3**

۶ **2**

۶۴ **1**

گزینه ۴ ✓

چون ۲۵۵ زیر مجموعه‌ی محض دارد، پس در کل $255 + 1 = 256$ زیر مجموعه داشته است. چون:

$$256 = 2^8$$

پس تعداد عضوهای مجموعه برابر ۸ بوده است.

مجموعه‌ی $A = \{1^n + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ چند زیر مجموعه دارد؟

۸ **4**

بی‌شمار **3**

۴ **2**

۲ **1**

گزینه ۲ ✓

جای n عددهای طبیعی را قرار می‌دهیم تا مجموعه مشخص گردد:

$$n = 1: \quad 1^1 + (-1)^1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow 0 \in A$$

$$n = 2: \quad 1^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow 2 \in A$$

هر عدد دیگری جای n قرار دهیم، همین دو عضو برای A به دست خواهد آمد. پس مجموعه دو عضو دارد و تعداد زیر مجموعه‌ها:

$$2^2 = 4$$



--- ❖ ---

❖ در چند زیر مجموعه از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ کوچکترین عضو ۲ و بزرگترین عضو ۸ است؟

- ۱ ۳۲ ۲ ۱۶ ۳ ۶۴ ۴ ۸

گزینه ۱ ✓

مشابه تست قبلی:

پایه تمام زیر مجموعه‌های $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ را انتخاب کرده و سپس عددهای ۲ و ۸ را به هر کدام اضافه کنیم:

$$2^5 = 32$$

--- ❖ ---

❖ اگر $R = \{1, -1, -2, 2\}$ و $A = \{x \mid x = \frac{k}{k^2}, x \in \mathbb{Z}, k \in R\}$ باشد، مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد؟

- ۱ ۸ ۲ ۲ ۳ ۱۶ ۴ ۴

گزینه ۴ ✓

عضوهای R را در کسر $x = \frac{k}{k^2}$ جایگزین کرده، حاصل فقط اگر عدد صحیح باشد، در A جای می‌گیرد:

$$\frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1, \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1, \frac{-2}{(-2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}, \frac{2}{(2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \{1, -1\}$$

در نتیجه:

A دارای $2^2 = 4$ زیر مجموعه است.

--- ❖ ---

❖ مجموعه‌ی $A = \{2^{1390} + 2, 2^{1390} + 4, 2^{1390} + 8, \dots, 2^{1391}\}$ چند زیر مجموعه دارد؟

- ۱ 2^{1388} ۲ 2^{1389} ۳ 2^{1390} ۴ 2^{1391}

گزینه ۳ ✓

توجه کنید:

عضوهای مجموعه به ترتیب چین هستند:

$$2^{1390} + 2^1, 2^{1390} + 2^2, 2^{1390} + 2^3, \dots$$

برای آن‌که آخرین عضو 2^{1391} شود، باید به صورت $2^{1390} + 2^{1390} = 2 \times 2^{1390} = 2^{1391}$ باشد. یعنی عضوهای A دقیقاً 1390 عدد زیر هستند:

$$2^{1390} + 2^1, 2^{1390} + 2^2, 2^{1390} + 2^3, \dots, 2^{1390} + 2^{1390}$$

چون مجموعه 1390 عضو دارد، پس 2^{1390} زیرمجموعه خواهد داشت.

--- ❖ ---

❖ مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه دارد که اختلاف بزرگترین و کوچکترین عضو آن ۵ باشد؟

- ۱ ۳۲ ۲ ۸۰ ۳ ۶۴ ۴ ۸

گزینه ۲ ✓



مشابه تست قبل، ولی چند حالت مختلف دارد:

- کوچکترین عضو ۱ و بزرگترین عضو ۶ باشد:

$$2^6 = 16$$

حالات دیگر هم تعداد مشابه دارند:

- کوچکترین عضو ۲ و بزرگترین عضو ۷ باشد: $2^6 = 16$
- کوچکترین عضو ۳ و بزرگترین عضو ۸ باشد: $2^6 = 16$
- کوچکترین عضو ۴ و بزرگترین عضو ۹ باشد: $2^6 = 16$
- کوچکترین عضو ۵ و بزرگترین عضو ۱۰ باشد: $2^6 = 16$

کل حالات برابر $5 \times 16 = 80$ خواهد شد.

--- ❖ ---

جمع بندی و تکمیل تعداد زیر مجموعه‌ها در چند حالت مهم:

نکته ۱۱

یک مجموعه‌ی n عضوی دارای:

- تعداد n زیر مجموعه‌ی یک عضوی است.
- تعداد $\frac{n \times (n-1)}{2}$ زیر مجموعه‌ی دو عضوی است.
- تعداد 2^n زیر مجموعه، تعداد $2^n - 1$ زیر مجموعه‌ی محض، تعداد $2^n - 1$ زیر مجموعه‌ی ناتهی و تعداد $2^n - 2$ زیر مجموعه‌ی محض و ناتهی است.

❖ تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ که کوچکترین عضو آن ۵ باشد، برابر کدام است؟

۱۶ ④

۱۰ ③

۱۵ ②

۲۰ ①

گزینه ۳ ✓

باید دو عضو از بین پنج عضو $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ انتخاب کنیم و سپس عدد ۵ را کنار آن‌ها قرار دهیم تا:

اولاً: زیر مجموعه‌های دارای سه عضو تشکیل گردند.

ثانیاً: کمترین عضو هر یک ۵ شود.

$$\frac{5 \times (5-1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

طبق نکته‌ی قبل، تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ برابر است با:

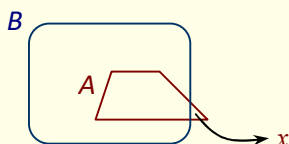
--- ❖ ---

بررسی حالت $A \not\subseteq B$:

نکته ۱۲

رابطه‌ی $A \not\subseteq B$ فقط (دقیقاً) به این معنی است که:

لااقل یک عضو چون x در A هست که در B نباشد.





برای نمونه:

در مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، چون $1 \in A$ است ولی $1 \notin B$ ، در نتیجه: در این دو مجموعه، عبارت $A \subseteq B$ صحیح است. (ولی سایر عضوهای A در B هستند).

در پایان این بخش، مفهوم تساوی دو مجموعه بیان و بررسی می‌شود.

نکته ۱۳

هرگاه اعضای دو مجموعه‌ی A و B کاملاً یکسان باشند، یعنی:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

در این صورت، دو مجموعه را «برابر» یا «مساوی» گفته و می‌نویسیم:

$$A = B$$

توجه کنید:

مجموعه‌های A و B هنگامی برابرند که روابط $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ هر دو درست باشند.

❖ دو مجموعه‌ی $A = \{7, -x, y\}$ و $B = \{5, -2, 7\}$ مساوی هستند. xy کدام است؟

۸ ④

۵ ③

۷ ②

۱۰ ①

گزینه ۱ ✓

با مقایسه‌ی دو مجموعه نتیجه می‌گیریم که $x = 2$ و $y = 5$ است. در نتیجه:

$$xy = 2 \times 5 = 10$$

--- ❖ ---

❖ به ازای چه تعداد عدد صحیح x ، دو مجموعه‌ی $A = \{1, x^2, x\}$ و $B = \{y, y^2\}$ برابر هستند؟

هیچ ④

۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۲ ✓

عضوهای دو مجموعه را مقایسه می‌کنیم:

چون عدد ۱ در A هست، باید در B هم باشد. دو حالت ممکن است:

- می‌تواند $y = 1$ باشد؛ در این صورت $B = \{1\}$ است و باید $x = 1$ باشد تا تساوی $A = B$ برقرار گردد.
- می‌تواند $y^2 = 1$ باشد؛ در این صورت $y = -1$ هم قبول است و $B = \{-1, 1\}$ است و باید $x = -1$ باشد تا تساوی $A = B$ برقرار گردد.

پس برای x دو جواب ۱ و -۱ وجود خواهد داشت.

--- ❖ ---



ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۱

مقدار $n(\{n(A), n(B), n(C)\})$ برابر کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

4 صفر

3 ۳

2 ۲

1 ۱

گزینه ۴

برای مجموعه‌ی $D = \{n(A), n(B), n(C)\}$ فقط سه حالت ممکن است:
 ۱) اگر A ، B و C تعداد عضوهای یکسان داشته باشند، $n(D) = 1$ است.
 ۲) اگر از بین A ، B و C فقط دو مجموعه تعداد عضوهای یکسان داشته باشند، $n(D) = 2$ است.
 ۳) اگر A ، B و C هر سه تعداد عضوهای متفاوت داشته باشند، $n(D) = 3$ است.

--- ❓ ---



جبر مجموعه‌ها

در این بخش، چند عمل جبری روی مجموعه‌ها و ساخت مجموعه‌هایی جدید خواهیم دید.

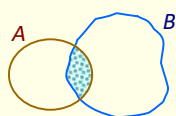
نکته ۱۴

برای دو مجموعه A و B ، «اشتراک» آن‌ها:

مجموعه‌ی تمام اعضای است که هم در A و هم در B قرار داشته باشند.

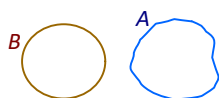
این مجموعه را به صورت $A \cap B$ نشان می‌دهیم. بنابراین با نماد ریاضی:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$$



حالت ویژه:

ممکن است دو مجموعه عضو مشترک نداشته باشند؛ در این صورت آن‌ها را «بدا از هم» یا «مجزا» گویند:



(حاصل اشتراک دو مجموعه‌ی مجزا، تهی است.)

$$A \cap B = \emptyset$$

برای نمونه؛

در مورد مجموعه اعداد طبیعی فرد O و مجموعه اعداد طبیعی زوج E داریم:

$$O \cap E = \emptyset$$

مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد 12 و B مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد 14 است. $A \cap B$ کدام است؟

④ $\{1, 2, 4\}$

③ $\{1, 12, 14\}$

② $\{1, 2, 4\}$

① $\{1, 2\}$

گزینه ۱

توجه داشته باشید:

$A \cap B$ دقیقاً شامل عددهایی است که ب.م.م 12 و 14 یعنی 2 ، بر آن‌ها بخش‌پذیر باشد.

پس چوایب مجموعه شمارنده‌های عدد 2 و به صورت $\{1, 2\}$ است.

--- ❓ ---

اشتراک هر دو زیرمجموعه‌ی سه عضوی و متفاوت از مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d\}$ دارای چند عضو است؟

④ صفر

③ ۱

② ۳

① ۲

گزینه ۱

چون مجموعه در کل چهار عضو دارد، در هر زیرمجموعه‌ی سه عضوی، یک عضو بیرون می‌ماند. پس در دو مجموعه، دو عضو بیرون مانده و دو عضو دیگر آن‌ها یکسان (مشترک) خواهند ماند. مثلاً:



$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\}$$



توجه کنید:

گاهی مجموعه‌ها را با یک «اندیس» n (یا حروف دیگر) با نماد A_n معرفی می‌کنند؛ مانند:

$$A_n = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < n\}$$

در این صورت، با قرار دادن عددهای ۱، ۲، ۳ و ... به جای n ، می‌توان مجموعه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 و ... را نوشت:

$$n=1: A_1 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 1\} \Rightarrow A_1 = \emptyset$$

$$n=2: A_2 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 2\} \Rightarrow A_2 = \{1\}$$

$$n=3: A_3 = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} \Rightarrow A_3 = \{1, 2\}$$

با ادامه، برای نمونه می‌توان نوشت:

$$A_{10} = \{1, 2, 3, \dots, 9\} \quad \text{و} \quad A_{84} = \{1, 2, 3, \dots, 83\}$$

البته از همان ابتدا هم با قدری دقت معلوم بود $A_1 = \emptyset$ است و:

$$A_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\} \quad (n > 1)$$

◇ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -n, 2^m \leq n\}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $A_3 \cap A_4$ چند زیر مجموعه دارد؟

۸ ④

۳۲ ③

۱۶ ②

۶۴ ①

گزینه ۳ ✓

با دقت تمام، جای n عددهای ۳ و ۴ را قرار می‌دهیم؛

$$n=3: A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\}$$

با توجه به مقادیر $2^{-3} = \frac{1}{8}$ ، $2^{-2} = \frac{1}{4}$ و $2^{-1} = \frac{1}{2}$ و $2^0 = 1$ داریم؛

$$A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

به روش مشابه؛

$$n=4: A_4 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -4, 2^m \leq 4\}$$

پس؛ $A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ است و $A_3 \cap A_4 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ دارای پنج عضو است و تعداد زیر مجموعه‌ها؛

$$2^5 = 32$$



نکته ۱۵

اگر $A \subseteq B$ باشد، اشتراک آن‌ها برابر **مجموعه‌ی کوچک‌تر** یعنی A است:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$$

در نتیجه موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{و} \quad A \cap A = A$$



❖ اگر $A_i = \{x \mid -i < x < i, x \in \mathbb{N}\}$ باشد، $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ کدام است؟

④ A_1

③ $A_n - A_1$

② A_n

① A_1

گزینه ۱ ✓

مشابه قبیل، با عدد دادن به i داریم:

$$A_1 = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

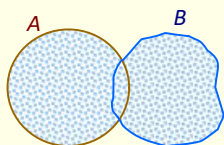
چون تهی عضو ندارد، اشتراک آن با هر مجموعه‌ای همان تهی است.

--- ❖ ---

عمل «اجتماع» بین مجموعه‌ها چنین بیان می‌شود:

نکته ۱۶

برای دو مجموعه A و B ، اجتماعشان $A \cup B$ است و آن:



شامل تمام اعضای است که لااقل در یکی از A یا B قرار داشته باشند.

با نماد ریاضی:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

بعلاوه، در نمایش $A \cup B$:

اعضای تکراری (مشترک) دو مجموعه، فقط یک بار نوشته می‌شوند.

❖ اجتماع دو مجموعه‌ی $\{\{a, a\}, \{\emptyset\}\}$ و $\{a, \emptyset\}$ ، چند زیر مجموعه دارد؟

④ ۸

③ ۴

② ۱۶

① ۳۲

گزینه ۴ ✓

دقت کنید:

مجموعه‌ی اول فقط یک عضو $\{\{a, a\}, \{\emptyset\}\}$ و مجموعه‌ی دوم دو عضو \emptyset و a را دارد. پس اجتماعشان سه عضو داشته و تعداد زیر مجموعه‌ها:

$$2^3 = 8$$

--- ❖ ---

نکته ۱۷

اگر $A \subseteq B$ باشد، اجتماع آن‌ها برابر مجموعه‌ی بزرگ‌تر یعنی B است:

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

بویژه: موارد زیر همیشه درست هستند:

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{و} \quad A \cup A = A$$



ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۴

اگر $A \cup B = \{2, 3, 4\}$ و $A \cap B = A$ ، مجموعه‌ی A حداکثر چند عضو دارد؟

- ۱ ۴ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

گزینه ۳

طبق $A \cap B = A$ ، باید $A \subseteq B$ باشد و بنابراین؛ $A \cup B = B = \{2, 3, 4\}$ است. بنابراین؛ A حداکثر می‌تواند شامل سه عدد ۲ و ۳ و ۴ باشد.

اگر $A_i = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -i \leq x \leq i\}$ باشد، آنگاه $\bigcup_{i=1}^n A_i$ برابر خواهد بود با:

- ۱ A_n ۲ $\{-1, 0, 1\}$ ۳ از $-\infty$ تا $+\infty$ ۴ \emptyset

گزینه ۱

- منظور از $\bigcup_{i=1}^n A_i$ همان $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ است.
- مجموعه‌های A_1, A_2, \dots رفته رفته در حال بزرگ‌تر شدن هستند؛ چون:
 $A_1 = \{-1, 0, 1\}$, $A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, ...
 پس اجتماع آن‌ها بزرگ‌ترین مجموعه، یعنی A_n خواهد شد.

اگر A, B و C سه مجموعه باشند به طوری که $A \subseteq B \subseteq C$ باشد، آنگاه $[(A \cap B) \cup C] \cap (A \cup B)$ کدام است؟

- ۱ $A \cap B$ ۲ $C \cup B$ ۳ B ۴ C

گزینه ۳

طبق نکات قبل و توجه به شرط $A \subseteq B \subseteq C$ ، عبارات ساده می‌شوند:

$$[(\underbrace{A \cap B}_{=A}) \cup C] \cap (\underbrace{A \cup B}_{=B}) = [\underbrace{A \cup C}_{=C}] \cap B = C \cap B = B$$

دو خاصیت بدیهی:

برای دو مجموعه‌ی A و B همیشه:

▪ $A \cap B$ زیر مجموعه‌ی هر دوی A و B است:

$$A \cap B \subseteq A \quad \text{و} \quad A \cap B \subseteq B$$

▪ هر دوی A و B زیر مجموعه‌ی $A \cup B$ هستند:

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{و} \quad B \subseteq A \cup B$$

حاصل $\emptyset \cup [A \cap (A \cup B)]$ کدام است؟

- ۱ \emptyset ۲ A ۳ B ۴ $A \cup B$

گزینه ۲



طبق نکته ی قبل و مقایسه ی مجموعه های کوچک یا بزرگ و این که تپی در اجتماع نقشی ندارد:

$$\emptyset \cup [A \cap (A \cup B)] = \underbrace{[A \cap (A \cup B)]}_{=A} = A$$

(نکته: در مقایسه ی A و $A \cup B$ ، مجموعه ی A کوچک و $A \cup B$ بزرگ محسوب می شود.)

--- ❖ ---

❖ اگر $A_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ باشد، حاصل مجموعه ی $(A_p \cap A_s) \cup (A_f \cap A_d)$ کدام است؟

④ $\{1, 2, 3, 4\}$

③ $\{1, 2\}$

② $\{1\}$

① $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

گزینه ۴

می بینید که:

$$A_p = \{1, 2\}, A_s = \{1, 2, 3\}, A_f = \{1, 2, 3, 4\}, A_d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

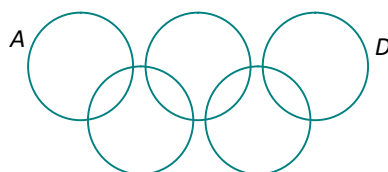
چون با زیاد شدن n ، مجموعه ها بزرگ می شوند، با مقایسه مجموعه ی کوچک و بزرگ به آسانی می نویسیم:

$$\underbrace{(A_p \cap A_s)}_{=A_p} \cup \underbrace{(A_f \cap A_d)}_{=A_f} = A_p \cup A_f = A_f$$

--- ❖ ---

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۷

نمودار ون تعدادی از زیر مجموعه های متفاوت $\{1, 2, 3\}$ رسم شده؛ کدام گزینه در مورد $A \cup D$ درست است؟



① می تواند دو عضوی باشد.

② می تواند سه عضوی باشد.

③ حتماً یک عضوی است.

④ این پنج مجموعه نمی توانند متفاوت باشند.

گزینه ۴

مجموعه ی A حداقل یک عضو مشترک با مجموعه ی پایین خود دارد و چون باید آن دو متفاوت باشند، لااقل یکی از آن ها عضو دیگری دارد. پس:

A و مجموعه ی پایین آن با هم حداقل ۲ عضو دارند.

به صورت مشابه؛ مجموعه ی D و مجموعه ی پایینی آن هم با هم لااقل باید ۲ عضو داشته باشند. اما مجموعه ی اولیه: $\{1, 2, 3\}$ در کل سه عضو دارد، پس این مجموعه ها نمی توانند متفاوت باشند.

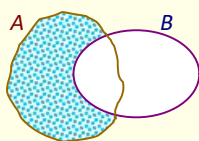
--- ❖ ---

اختلاف یک مجموعه نسبت به مجموعه ای دیگر را می توان با استفاده از مفهوم زیر به دست آورد:

نکته ۱۸

تفاضل مجموعه ی B از A را با $A - B$ نشان داده و آن:

شامل تمام عضوایی است که در A هستند ولی در B قرار ندارند.



با نماد ریاضی:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$$



توجه کنید:

مجموعه $B - A$ نیز شامل اعضای است که در B بوده ولی در A نیستند.

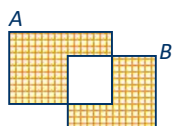
برای نمونه:

با در نظر گرفتن $A = \{-1, 2, 5, 6\}$ و $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ، مجموعه $(A \cup B) - (A \cap B)$ را مشخص می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{-1, 2, 3, 5, 6, 7\} \\ A \cap B &= \{2, 5\} \\ \Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) &= \{-1, 2, 3, 5, 6, 7\} - \{2, 5\} = \{-1, 3, 6, 7\} \end{aligned}$$

بعلاوه:

مجموعه‌ای که در نمونه‌ی قبل دیدیم، اعضای را مشخص می‌کند که: «دقیقاً در یکی از A و B قرار دارند». بعلاوه، این مفهوم به صورت دیگری هم در زیر نوشته شده و در شکل هم دیده می‌شود:



$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۸

اگر $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}$ ، $B = \{1, 2\}$ و $C = \{1, \{1\}\}$ ، آنگاه کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- ① $C \subseteq A$ ② $n(A \cap C) = 2$ ③ $A \cap B = \{1, 2\}$ ④ $(B - C) \cap A = \emptyset$

گزینه ۳

به آسانی دیده می‌شود که بین A و B فقط عدد ۱ مشترک است:

$$A \cap B = \{1\}$$

--- ❖ ---

نکته ۱۹

هنگام محاسبه $A - B$ ، دقیقاً اتفاق زیر رخ می‌دهد:

عضوهای مشترک بین دو مجموعه از A برداشته می‌شوند.

یعنی:

$$A - B = A - (A \cap B)$$

پس حالت‌های خاص زیر قابل بیان هستند:

▪ اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه:

$$A - B = \emptyset$$

▪ اگر $A \cap B = \emptyset$ باشد، آنگاه:

$$A - B = A$$

بعلاوه؛ عکس هر دو مورد بالا هم برقرار است:

$$A - B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq B \quad \text{و} \quad A - B = A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$



❖ اگر $B \subset A$ باشد، ساده شده‌ی عبارت $(B - A) - (B - C)$ کدام است؟

- 1 A 2 B 3 \emptyset 4 C

گزینه ۳

با توجه به شرط $B \subset A$ ، حاصل $B - A$ تهی است و در نتیجه بدون توجه به عضوهای $B - C$ ، همیشه $\emptyset - (B - C) = \emptyset$ است.

❖ با شرط $A \neq B$ ، کدام تساوی زیر نادرست است؟

- 1 $A - \emptyset = A$ 2 $A - A = \emptyset$ 3 $A - B = B - A$ 4 $\emptyset - A = \emptyset$

گزینه ۳

چون A و B برابر نیستند، مجموعه‌های $A - B$ و $B - A$ نیز متفاوت خواهند شد.

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۸

اگر A ، B ، C و D چهار مجموعه باشند به طوری که $((A \cup B) - C) - D = D$ ، آنگاه حاصل $A \cup B \cup C \cup D$ همواره برابر کدام است؟

- 1 \emptyset 2 C 3 D 4 $A \cup B$

گزینه ۲

اگر D عضوی مانند a داشته باشد، از حاصل عبارت $((A \cup B) - C) - D$ حذف می‌شود و در نتیجه تساوی داده شده برقرار نمی‌شود؛ پس: $D = \emptyset$. اکنون تساوی چنین نوشته می‌شود:

$$((A \cup B) - C) - \emptyset = \emptyset \rightarrow (A \cup B) - C = \emptyset \Rightarrow (A \cup B) \subseteq C$$

در نتیجه طبق خواص اجتماع:

$$A \cup B \cup C \cup \emptyset = (A \cup B) \cup C = C$$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۰

اگر A و B دو مجموعه باشند، چه تعداد از عبارت‌های زیر $A = B$ را نتیجه می‌دهند؟

$$n(A \cup B) = n(A \cap B), \quad A - B = B - A, \quad B \subseteq A - B, \quad A \subseteq A - B$$

- 1 ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴

گزینه ۲

همه‌ی موارد را به ترتیب از چپ به راست بررسی می‌کنیم:

- قبول است، زیرا: اگر $A \neq B$ باشد، $A \cup B$ و $A \cap B$ متفاوت می‌شوند و تعداد عضوهایشان یکسان نخواهد شد.
- قبول است، زیرا: اگر $A \neq B$ باشد، $A - B$ و $B - A$ حداقل یک عضو متفاوت خواهند داشت و نابرابر می‌شوند.
- قبول نیست، زیرا:

کافی است $B = \emptyset$ باشد و A هر مجموعه‌ی دلخواه نابرابر با B .



- قبول نیست، زیرا؛

کافی است $A = \emptyset$ باشد و B مجموعه دلخواهی نابرابر با A .

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۱

اگر A و B دو مجموعه عددی دلخواه و غیرتهی بوده، A زیر مجموعه‌ی B نباشد و \overline{A} به معنای «بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی A » باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

$$\overline{(A-B)} = \overline{A} - \overline{B} \quad \overline{A+B} \leq \overline{(A \cup B)} \quad \overline{(A-B)} \leq \overline{A}$$

- ۱ **1** ۲ **2** ۳ **3** ۴ **4** صفر

گزینه ۱

واضح است که نامساوی $\overline{(A-B)} \leq \overline{A}$ درست است، زیرا؛

$A-B$ یک زیرمجموعه از A است و بنابراین بزرگ‌ترین عضو آن نمی‌تواند از بزرگ‌ترین عضو A بزرگ‌تر باشد. ولی دو ادعای دیگر، با مثال‌های ساده‌ای رد می‌شوند. برای نمونه؛

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\} \Rightarrow \underbrace{\overline{(A-B)}}_1 \neq \underbrace{\overline{A} - \overline{B}}_{2-3=-1}, \quad \underbrace{\overline{A+B}}_{2+3=5} \not\leq \underbrace{\overline{(A \cup B)}}_3$$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۷

یازده زیر مجموعه‌ی غیر مساوی از $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که از هر دوتای آنها، یکی زیر مجموعه‌ی دیگری باشد. اگر A ، B و C به ترتیب مجموعه‌های ۷، ۵ و ۳ عضوی این ۱۱ مجموعه باشند، در مورد $A \cup (B-C)$ چه می‌توان گفت؟

- ۱ **1** ۱۱ عضوی است. ۲ **2** ۹ عضوی است.
۳ **3** ۷ عضوی است. ۴ **4** ۵ عضوی است.

گزینه ۳

چون B و C تعداد عضو کمتری از A دارند، هر دو زیر مجموعه‌ی A هستند. در نتیجه؛

$$(B-C) \subseteq A \Rightarrow A \cup (B-C) = A$$

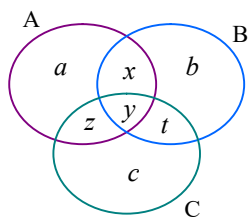
این مجموعه ۷ عضوی است.

اگر A ، B و C سه مجموعه هستند به طوری که $A-B$ ، $B-C$ ، $B-A$ ، $C-A$ و $C-B$ به ترتیب ۳، ۲، ۲، ۴ و ۵ عضو دارند. مجموعه‌ی $A-C$ چند عضو است؟

- ۱ **1** ۲ **2** ۳ **3** ۴ **4**



گزینه ۲



شکل مناسبی رسم کرده و تعداد عضوهای هر بخش را نام گذاری می کنیم.
اطلاعات داده شده چنین هستند:

$$(1) a + z = 3 \quad (2) b + x = 2 \quad (3) b + t = 2$$

$$(4) c + t = 4 \quad (5) z + c = 5$$

باید $a + x$ حساب شود. دو طرف پنج تساوی را به صورت زیر با هم جمع کرده و آن را ساده می کنیم:

$$\underbrace{a+z}_{(1)} + \underbrace{b+x}_{(2)} + \underbrace{c+t}_{(4)} + \underbrace{2}_{(3)} + \underbrace{5}_{(5)} = \underbrace{3}_{(1)} + \underbrace{2}_{(2)} + \underbrace{4}_{(4)} + \underbrace{b+x}_{(2)} + \underbrace{z+c}_{(5)} \Rightarrow a+x=2$$

---◇---



مجموعه و احتمال

مجموعه‌ها در بیان مفاهیم و محاسبه‌ی احتمالات کاربرد فراوان دارند.

نکته ۲۰

در یک آزمایش شانس:

فضای نمونه ای: مجموعه‌ی تمام نتایج ممکن بوده و با S نشان داده می‌شود.

پیشامد: هر زیر مجموعه از S یک پیشامد محسوب می‌شود که با حروف A ، B و ... نام گذاری می‌شوند.

برای نمونه:

در پرتاب یک تاس، فضای نمونه‌ای و چند پیشامد مربوط به آن را ببینید:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- پیشامد ظاهر شدن عدد مضرب ۵ چنین است: $A = \{5\}$
- پیشامد ظاهر شدن عدد اول: $B = \{2, 3, 5\}$
- پیشامد ظاهر شدن عدد دو رقمی، برابر تهی است: $C = \{\} = \emptyset$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۸

اگر در پرتاب یک تاس بدانیم که عدد رو شده، شمارنده‌ی عدد ۶ نمی‌باشد. در این صورت تعداد کل پیشامدها برابر کدام است؟

۸ ④

۶ ③

۴ ②

۲ ①

گزینه ۲

تمام حالات ممکن عبارت است از: $S = \{4, 5\}$. تعداد کل پیشامدها، دقیقاً برابر تعداد زیر مجموعه‌های S است:

$$2^2 = 4$$

--- ---

گاهی آزمایش شانس بیش از یک نتیجه دارد؛ نمونه‌هایی ببینید:

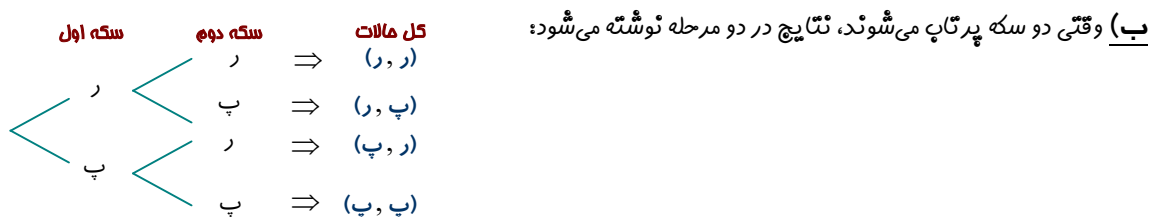
مثال: الف) اگر یک سکه پرتاب شود، فضای نمونه‌ای چیست؟

ب) اگر دو سکه باهم پرتاب شوند، فضای نمونه‌ای چیست؟

پاسخ

از این پس، ظاهر شدن پشت سکه را با «پ» و ظاهر شدن روی آن را با «ر» نشان می‌دهیم.
الف) فقط دو حالت می‌تواند رخ دهد:

$$S = \{ر, پ\}$$



ب) وقتی دو سکه پرتاب می‌شوند، نتایج در دو مرحله نوشته می‌شود:

پس کلاً چهار حالت می‌تواند رخ دهد:

$$S = \{(ر, ر), (ر, پ), (پ, ر), (پ, پ)\} \rightarrow n(S) = 4$$

--- ❖ ---

❖ یک سکه را با یک تاس انداختیم. تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای کدام است؟

۸ ④

۱۸ ③

۱۲ ②

۳۶ ①

گزینه ۲

سکه دو حالت دارد و برای هر حالت آن، برای تاس شش حالت می‌تواند رخ دهد. پس در کل:

$$2 \times 6 = 12$$

--- ❖ ---

❖ سه سکه را با هم انداختیم. اگر A پیشامد «حداقل یک بار رو ظاهر شدن» و B پیشامد «حداکثر یک بار پشت ظاهر شدن»

باشد، در مورد تعداد عضوهای پیشامدها کدام مورد درست است؟

$$n(A) = n(B) + 3 \quad ②$$

$$n(A) = 3n(B) \quad ①$$

$$n(B) = n(A) + 3 \quad ④$$

$$n(B) = 3n(A) \quad ③$$

گزینه ۲

چون هر سکه دو حالت دارد، فضای نمونه‌ای $2 \times 2 \times 2 = 8$ عضو به صورت زیر دارد:

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

پس:

$$A = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, ر), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر)\}$$

و:

$$B = \{(ر, ر, ر), (پ, ر, ر), (ر, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (پ, ر, پ)\}$$

می‌بینید که $n(A) = 7$ و $n(B) = 4$ بوده و فقط گزینه‌ی دوم درست است.

--- ❖ ---

نکته ۲۱

احتمال رخ دادن یک پیشامد A را با $P(A)$ نشان داده و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{\text{تعداد عضوهای پیشامد}}{\text{تعداد کل حالات}} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$



کدام مورد درست است؟

- ① احتمال این که تاس مضرب ۲ نیاید، کمتر از این است که تاس مضرب ۳ بیاید.
- ② احتمال این که سکه رو بیاید، بیشتر از این است که تاس عدد فرد بیاید.
- ③ احتمال این که یک سکه رو بیاید کمتر از این است که دو سکه هم زمان رو بیاید.
- ④ احتمال این که مجموع دو تاس هفت شود، بیشتر از این است که مجموع دو تاس پنج شود.

گزینه ۴

باید هر مورد بررسی شده و جمله‌ی درست مشخص گردد:

- **گزینه ۱:** عبارت به صورت $\frac{۳}{۶} < \frac{۲}{۶}$ نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۲:** عبارت به صورت $\frac{۱}{۲} > \frac{۳}{۶}$ نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۳:** عبارت به صورت $\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۴}$ نوشته می‌شود که نادرست است.
- **گزینه ۴:** عبارت به صورت $\frac{۶}{۳۶} > \frac{۴}{۳۶}$ نوشته می‌شود که درست است.

در یک جعبه ۲۰ توپ قرمز، ۳۰ توپ سفید و تعدادی توپ آبی وجود دارد. اگر شما یک توپ به دلخواه از جعبه بردارید،

احتمال یا شانس آبی بودن آن، $\frac{۹}{۱۱}$ است. چند توپ در جعبه است؟

۲۲۵ ④

۲۷۵ ③

۱۷۵ ②

۱۲۵ ①

گزینه ۳

تعداد توپ‌های آبی را عدد مجهول x در نظر بگیرید. بنابراین:

- تعداد کل توپ‌های داخل جعبه برابر $۵۰ + x = ۲۰ + ۳۰ + x$ خواهد شد.
- پس احتمال آبی بودن توپ برابر است با:

$$\frac{x}{۵۰ + x}$$

بنابراین:

$$\frac{x}{۵۰ + x} = \frac{۹}{۱۱} \rightarrow ۱۱x = ۴۵۰ + ۹x \rightarrow ۲x = ۴۵۰ \Rightarrow x = ۲۲۵$$

در نتیجه تعداد کل توپ‌ها $۵۰ + ۲۲۵ = ۲۷۵$ بوده است.

در کاربرد روش غربال برای تعیین عددهای اول ۱ تا ۲۰۰، تاکنون ۱۶۱ بار عددها را خط زده‌ایم. عدد a بین ده عدد

بعدی است که خط خواهد خورد. احتمال این که a دو رقمی باشد، چقدر است؟

$\frac{۳}{۵}$ ④

$\frac{۱}{۲}$ ③

$\frac{۳}{۱۰}$ ②

۰ ①

گزینه ۴



ابتدا عدد ۱ خط خورده، سپس مضرب‌های ۲ به تعداد $200 - 1 = 99$ و سپس مضرب‌های ۳ که تعدادشان با توجه به $\frac{200}{3} \cong 66/6$ برابر $66 - 1 = 65$ است. چون $66 + 99 + 65 = 165$ است، پس ۱۶۱ عدد خط خورده‌ی گفته شده، تا قبل از چهار عدد پایانی مضرب ۳ بوده‌اند. بنابراین:

ده عدد بعدی ابتدا ۱۸۹، ۱۹۲، ۱۹۵ و ۱۹۸ و سپس مضارب ۵ به صورت ۱۰، ۱۵، ۲۰ و ... بوده‌اند.

پس دقیقاً شش عدد از بین آن‌ها دو رقمی است و جواب:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۳

در پرتاب دو تاس، احتمال این که جمع اعداد رو شده یا ضرب اعداد رو شده اول باشد، کدام است؟

④ $\frac{15}{36}$

③ $\frac{17}{36}$

② $\frac{21}{36}$

① $\frac{19}{36}$

گزینه ۱

تعداد کل حالت‌ها $6 \times 6 = 36$ است. نوشتن حالت‌های مطلوب با دقت:

$(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,1),$
 $(3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (5,1), (5,2), (5,6), (6,1), (6,5)$

جواب: $\frac{19}{36}$

توجه کنید:

در یک فضای نمونه‌ای S ، موارد زیر همیشه درست هستند:

■ چون $n(\emptyset) = 0$ است، پس: $P(\emptyset) = \frac{0}{n(S)} = 0$

یعنی: پیشامد تهی هیچ وقت رخ نمی‌دهد.

■ همیشه: $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

یعنی: فضای نمونه‌ای به عنوان یک پیشامد، همیشه رخ می‌دهد.

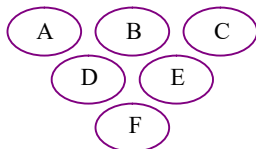
■ چون $0 \leq n(A) \leq n(S)$ است، پس:

$$0 \leq \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

یعنی: کمترین احتمال برابر صفر و بیشترین احتمال برابر یک است.



قدری پیشرفته‌تر



❓ A ، B و C سه مجموعه‌ی دلخواه هستند و از ردیف دوم به پایین در شکل مقابل، هر مجموعه تفریق دو مجموعه‌ی بالای خودش است (سمت چپ منهای سمت راست؛ مثلاً $D = A - B$). کدام مورد حتماً درست است؟

- 1 $B \subseteq F$ 2 $(D \cap B) \subseteq F$ 3 $(A \cap C) \subseteq F$ 4 $(D \cup C) \subseteq F$

گزینه ۲

چنان که گفته شده است:

$$D = A - B \quad \text{و} \quad E = B - C$$

بنابراین D و E عضو مشترک ندارند (چون: D هیچ عضوی از B نداشته و E فقط برخی از اعضای B را شامل است). در نتیجه:

$$F = D - E = D$$

اکنون واضح است که $(D \cap B) \subseteq F$ می‌باشد.

❓ می‌دانیم:

اگر یک عدد فرد مجذور کامل باشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۸ برابر ۱ است.

از مجموعه‌ی $\{1, 11, 111, 1111, \dots\}$ ، زیر مجموعه‌ای شامل تمام عددهای مجذور کامل ممکن را نوشته‌ایم. این زیر مجموعه، خود چه تعداد زیرمجموعه دارد؟

- 1 ۲ 2 ۴ 3 ۸ 4 بی‌شمار

گزینه ۱

واضح است که عدد ۱ مجذور کامل است، ولی عددهای ۱۱ و ۱۱۱ چنین نیستند. از طرفی می‌دانیم:

بخش‌پذیری عددها بر ۸ و همچنین، باقی مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر ۸، فقط به سه سمت راست آن‌ها بستگی دارد.

با تقسیم می‌بینید که باقی مانده‌ی تقسیم ۱۱۱ بر ۸ برابر ۷ است؛ چون باقی‌مانده ۱ نیست، هیچ‌کدام از عددهای ۱۱۱۱، ۱۱۱۱۱، ... نمی‌توانند مجذور کامل باشند. پس آن زیرمجموعه $\{1\}$ بوده و خود تعداد $2^1 = 2$ زیرمجموعه دارد.

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۹

مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 100\}$ و B زیر مجموعه‌ای از A باشد به طوری که هر دو عضو دلخواه که از آن در نظر بگیریم، یکی شمارنده‌ی دیگری باشد. مجموعه‌ی B حداکثر چند عضو دارد؟

- 1 ۶ 2 ۷ 3 ۸ 4 ۹

گزینه ۲

باید عضوهای مجموعه‌ی B ، همه توان‌های یک عدد باشند تا شرط گفته شده برقرار باشد، مانند: $3^0, 3^1, 3^2, \dots$ یا $6^0, 6^1, 6^2, \dots$. برای این که بیشترین تعداد عضو در مجموعه واقع شود، کافی است پایه را کوچک‌ترین مقدار ممکن بگیریم:

$$B = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$



ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۶

از کیسه‌ای شامل ۹ گوی شماره گذاری شده از ۱ تا ۹، در سه نوبت، هر بار یک گوی بیرون می‌آوریم و در جدول زیر، خانه‌ی مربوطه را ضربدر می‌زنیم. (گوی‌ها را به کیسه بر نمی‌گردانیم!) چقدر احتمال دارد که همه‌ی خانه‌های یک سطر یا ستون یا قطر این جدول علامت‌دار شوند؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

$$\frac{۲۴}{۵۰۴} \quad 2$$

$$\frac{۴۸}{۵۰۴} \quad 4$$

$$\frac{۸}{۵۰۴} \quad 1$$

$$\frac{۳۰}{۵۰۴} \quad 3$$

گزینه ۴

پرای گوی اول ۹ حالت داریم، چون گوی‌ها را بر نمی‌گردانیم، پرای گوی دوم ۸ حالت و پرای گوی سوم ۷ حالت داریم. بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$$n(S) = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

توجه کنید:

پرای این که عددهای سطر اول علامت‌دار شوند، باید سه عدد ۱ و ۲ و ۳ با هر ترتیبی خارج شوند:

۱, ۲, ۳ ۱, ۳, ۲ ۲, ۱, ۳ ۲, ۳, ۱ ۳, ۱, ۲ ۳, ۲, ۱

پس ۶ حالت قابل قبول است. حالات مطلوب هفت قسمت دیگر هم دارد:

سطر دوم سطر سوم ستون اول ستون دوم ستون سوم قطر اول قطر دوم

یعنی؛ ۸ حالت کلی که هر کدام خودشان ۶ حالت دارند؛ $n(A) = 8 \times 6 = 48$. در نتیجه:

$$P(A) = \frac{48}{504}$$



برخی مباحث پیشرفته‌تر در ارتباط با مجموعه‌ها را در ادامه‌ی این بخش خواهیم دید.

یادآوری:

فرمول مجموع عددهای طبیعی متوالی با شروع از عدد ۱ اهمیت و کاربرد زیادی دارد:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

برای نمونه:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times (100 + 1)}{2} = 50 \times 101 = 5050$$

نمونه‌ی دیگر:

مجموع عددهای ۱۵۰، ۱۵۲، ۱۵۴، ...، ۵۰۵ را با استفاده‌ی مناسب از فرمول حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 50 + 52 + 54 + \dots + 150 &= 2(25 + 26 + 27 + \dots + 75) = 2[(1 + 2 + 3 + \dots + 75) - (1 + 2 + 3 + \dots + 24)] \\ &= 2\left[\frac{75 \times (75 + 1)}{2} - \frac{24 \times (24 + 1)}{2}\right] = 5700 - 600 = 5100 \end{aligned}$$



مجموع مضرب‌های دو رقمی عدد ۷ کدام است؟

۷۲۸ ④

۷۹۸ ③

۶۹۸ ②

۶۲۸ ①

گزینه ۴

تمام مضرب‌های دو رقمی عدد ۷ چنین هستند:

$$۱۴, ۲۱, \dots, ۹۸$$

جمع آن‌ها مشابه نمونه‌ی بالا:

$$\begin{aligned} ۱۴ + ۲۱ + \dots + ۹۸ &= ۷(۲ + ۳ + \dots + ۱۴) = ۷ \times [(1+2+3+\dots+14) - 1] \\ &= ۷ \times \left[\frac{14 \times (14+1)}{2} - 1 \right] = ۷ \times (105 - 1) = ۷۲۸ \end{aligned}$$

اگر $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{4, 5, 6\}$ و $A_n = \{7, 8, 9, 10\}$ باشند، مجموعه‌ی A_1 با چه عددی شروع می‌شود؟

۵۶ ④

۵۵ ③

۴۶ ②

۴۵ ①

گزینه ۲

با نگاه به مجموعه‌ها می‌بینید که A_n تعداد $۱+۲+۳+\dots+۹$ عدد نوشته خواهد شد:

$$۱+۲+۳+\dots+۹ = \frac{۹ \times ۱۰}{۲} = ۴۵$$

پس آخرین عضو مجموعه‌ی A_9 عدد ۴۵ است و اولین عضو مجموعه‌ی بعدی، یعنی A_{10} عدد ۴۶ خواهد بود.

شمارش سریع تعداد حالت‌هایی که یک کار می‌تواند انجام شود، بر مبنای دو قانون زیر انجام می‌شود:

نکته ۲۲

فرض کنید کار (۱) را به m روش و کار (۲) را به n روش بتوان انجام داد.

قانون ضرب:

انجام کار (۱) و کار (۲) با هم (همزمان) به $m \times n$ روش انجام می‌شود.

قانون جمع:

انجام فقط یکی از کارهای (۱) یا (۲) به $m+n$ روش انجام می‌شود.

توجه کنید:

حرف «و» نشانه‌ی ضرب و «یا» نشانه‌ی جمع است. (قوانین بالا برای بیش از دو کار هم برقرار است.)

مثال: چند عدد دو رقمی می‌توان نوشت که:

الف) تکرار رقم‌ها مجاز باشد.

ب) تکرار رقم‌ها مجاز نباشد.



پاسخ ✓

توجه کنید:

برای نوشتن یک عدد دو رقمی باید دو کار انجام شود:

کار اول: انتخاب دهگان **کار دوم:** انتخاب یکان

این کارها با انتخاب‌های قابل قبول از بین رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ انجام می‌شوند. سپس طبق قانون ضرب، جواب‌ها در هم ضرب می‌شوند. توجه داشته باشید که:

در دهگان نمی‌تواند رقم صفر قرار گیرد، چون عدد دو رقمی نخواهد شد.

الف) برای دهگان تمام رقم‌های ۱ تا ۹ می‌توانند انتخاب شوند (۹ حالت) و برای یکان رقم صفر هم می‌تواند انتخاب شود (۱۰ حالت). پس:

$$9 \times 10 = 90$$

ب) برای دهگان تمام رقم‌های ۱ تا ۹ می‌توانند انتخاب شوند (۹ حالت) ولی چون تکرار رقم‌ها مجاز نیست، رقم دهگان را نمی‌توانید در یکان قرار دهید؛ پس با هم انتخاب دارید (۹ حالت). پس:

$$9 \times 9 = 81$$

--- ◆ ---

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۴

همه‌ی عددهای سه رقمی را که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ساخته می‌شوند، در نظر بگیرید. اگر یکی از آن‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که عدد انتخاب شده، ارقام متمایز داشته باشد، ولی مضرب ۵ نباشد؟

1 $\frac{12}{25}$ 2 $\frac{12}{125}$ 3 $\frac{48}{125}$ 4 $\frac{13}{25}$

گزینه ۳ ✓

چون هر رقم پنج انتخاب دارد، تعداد کل $5 \times 5 \times 5 = 125$ است. برای این که عدد مضرب ۵ نبوده و ارقام متمایز باشند: «یکان ۴ انتخاب، دهگان نیز ۴ انتخاب و صدگان ۳ انتخاب دارد.» (دقیق توضیح دهید!)

در نتیجه:

تعداد حالت‌های مطلوب $4 \times 4 \times 3 = 48$ و جواب $\frac{48}{125}$ است.

--- ◆ ---

در پرتاب دو تاس، هر دو زوج آمدن را A و هر دو فرد آمدن را B می‌نامیم. کدام مورد درست است؟

1 $P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{8}$ 2 $P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{4}$

3 $P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{16}$ 4 $P^2(A) + P^2(B) = \frac{1}{2}$

گزینه ۱ ✓

در پرتاب دو تاس، چون هر تاس ۶ حالت دارد، کل حالت‌ها:

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

• هر دو تاس زوج بیایند، تعداد $n(A) = 3 \times 3 = 9$ حالت دارد: $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

• هر دو تاس فرد بیایند نیز تعداد $n(B) = 3 \times 3 = 9$ حالت دارد: $P(B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$



پس: $p^2(A) + p^2(B) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ است.

--- ❖ ---

بحث کامل و دقیق تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه، در دو نکته‌ی بعدی بیان شده‌اند. ابتدا حالتی که تعداد عضوهای زیرمجموعه مشخص شده باشد:

نکته ۲۳

فرض کنید مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد. در این صورت:

- تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی A برابر n است. $\frac{n}{1}$
- تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی A برابر $\frac{n \times (n-1)}{1 \times 2}$ است.

بعلاوه:

برای تعیین تعداد زیر مجموعه‌ها در سایر حالت‌ها، الگوی بالا را ادامه دهید:

تعداد زیرمجموعه سه عضوی $= \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$

تعداد زیرمجموعه چهار عضوی $= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

❖ اختلاف تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی و ۴ عضوی مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چقدر است؟

- ① ۱۰ ② ۸ ③ ۶ ④ ۵

گزینه ۴ ✓

طبق نکته‌ی قبلی:

$$\frac{6 \times (6-1) \times (6-2)}{1 \times 2 \times 3} - \frac{6 \times (6-1) \times (6-2) \times (6-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 20 - 15 = 5$$

--- ❖ ---

❖ چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ حداقل سه عضو دارند؟

- ① ۱۰۲۴ ② ۹۶۹ ③ ۹۶۸ ④ ۹۲۴

گزینه ۳ ✓

تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر $2^{10} = 1024$ است. زیرمجموعه‌هایی که شرط «حداقل سه عضو» را ندارند، کم می‌کنیم:

- تعداد یک زیرمجموعه‌ی صفر عضوی داریم.
- تعداد ده زیرمجموعه‌ی یک عضوی داریم.
- تعداد $\frac{10 \times (10-1)}{2} = 45$ زیرمجموعه‌ی دو عضوی داریم.

پس تعداد جواب‌ها $1024 - (1 + 10 + 45) = 968$ خواهد شد.

--- ❖ ---



وقتی تعداد عضوهای زیر مجموعه‌ها دلخواه باشد، تعداد کل آن‌ها از رابطه‌ی 2^n به دست می‌آید. (دلیل این مطلب را طبق اصل شمارش ضرب بیان کنید).

گاهی زیر مجموعه‌ها شرایط خاصی دارند:

نکته ۲۴

فرض کنید مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد.

تعداد زیر مجموعه‌های A که شامل k_1 عضو خاص باشند، برابر است با:

$$2^{n-k_1}$$

تعداد زیر مجموعه‌های A که شامل k_p عضو خاص نباشند، برابر است با:

$$2^{n-k_p}$$

تعداد زیر مجموعه‌های A که شامل k_1 عضو خاص باشند و شامل k_p عضو خاص نباشند، برابر است با:

$$2^{n-k_1-k_p}$$

مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ چند زیر مجموعه دارد به طوری که هر یک از آن‌ها شامل a باشد و b و c را نداشته باشد؟

۸ ④

۴ ③

۱۶ ②

۳۲ ①

گزینه ۴ ✓

مجموعه دارای $n = 6$ عضو است، باید تعداد $k_1 = 1$ عضو را داشته و $k_p = 2$ عضو را نداشته باشد. طبق نکته‌ی قبلی:

$$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$$

--- ④ ---

چند مجموعه‌ی A می‌توان نوشت که رابطه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\} \subseteq A \subseteq \{2, 4, 6, 8\}$ برای آن‌ها برقرار باشد؟

۱۲۸ ④

۶۴ ③

۱۰۰۸ ②

۶ ①

گزینه ۳ ✓

تمام زیرمجموعه‌ها قبول هستند؛ فقط باید تعداد $k_1 = 4$ عضو اجباری $2, 4, 6, 8$ در آن‌ها قرار گیرند:

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

--- ③ ---

چند زیر مجموعه برای مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌توان نوشت که ۵ یا ۶ را نداشته باشد؟

۲۴ ④

۶۴ ③

۱۶ ②

۴۸ ①

گزینه ۱ ✓

به تکلیک مل دقیقاً توجه کنید:

سه نوع مجموعه قبول هستند که تعداد عضوهایشان باید جمع شوند:



- آنهایی که ۵ را داشته، ولی ۶ را ندارند: $2^{6-1} = 2^5 = 16$
- آنهایی که ۶ را داشته، ولی ۵ را ندارند: $2^{6-1} = 2^5 = 16$
- آنهایی که هیچ کدام از ۵ و ۶ را ندارند: $2^{6-2} = 2^4 = 16$

پس تعداد کل آن‌ها $16 \times 3 = 48$ است.

❖ $A = \{x \mid 1 < x \leq 13, x \in \mathbb{N}\}$ است. اگر تمام زیر مجموعه‌های A را بنویسیم، رقم ۲ چند بار نوشته می‌شود؟

۳۰۷۲ ④

۱۰۲۴ ③

۲۰۴۸ ②

۴۰۹۶ ①

گزینه ۱

مجموعه‌ی A دارای ۱۲ عضو است. رقم ۲ در زیر مجموعه‌هایی که شامل ۲ یا ۱۲ (یا هر دو) باشند، دیده خواهد شد. تعداد مورد نظر را در سه حالت ممکن می‌شماریم:

۱) زیر مجموعه‌هایی که شامل ۲ بوده ولی شامل ۱۲ نباشند: تعدادشان $2^{12-2} = 2^{10}$ و در نتیجه تعداد رقم‌های ۲ نیز همین تعداد است.

۲) به صورت مشابه، زیر مجموعه‌هایی که شامل ۱۲ بوده ولی شامل ۲ نباشند: تعدادشان $2^{12-2} = 2^{10}$ و در نتیجه تعداد رقم‌های ۲ نیز همین تعداد است.

۳) زیر مجموعه‌هایی که شامل هر دوی ۲ و ۱۲ باشند: تعدادشان $2^{12-2} = 2^{10}$ ولی تعداد رقم‌های ۲ برابر $2 \times 2^{10} = 2^{11}$ است. تعداد کل:

$$2^{10} + 2^{10} + 2^{11} = 2 \times 2^{10} + 2^{11} = 2^{11} + 2^{11} = 2^{12} = 4096$$

توجه کنید:

اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند:

- $A \cap B$ پیشامد این است که هر دوی A و B رخ دهند.
- $A \cup B$ پیشامد این است که لااقل یکی از A و B رخ دهند.
- $A - B$ پیشامد این است که A رخ دهد، ولی B رخ ندهد؛ (یعنی: فقط A رخ دهد).

قوانینی که در زیر می‌آوریم، گاهی مورد استفاده واقع می‌شوند:

نکته ۲۵

قوانین احتمال:

به دو مورد پر کاربرد توجه کنید:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

❖ اگر $p(A) = 2p(B) = 3p(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{p(A \cup B)}{p(A \cap B)}$ کدام است؟



1 ۲

2 ۵/۲

3 ۷/۲

4 ۹/۲

گزینه ۳

از شرط داده شده دو نتیجه می‌گیریم:

$$p(A) = 2p(B) = 3p(A \cap B) \Rightarrow \begin{cases} p(A) = 3p(A \cap B) \\ p(B) = \frac{3}{2}p(A \cap B) \end{cases}$$

این روابط را در کسر جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{p(A \cup B)}{p(A \cap B)} &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{3P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{p(A \cap B)} \\ &= \frac{2P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{\frac{7}{2}P(A \cap B)}{p(A \cap B)} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 500\}$ عددی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۴ می‌باشد و بر ۶ بخش پذیر نیست؟

4 ۰/۱۷۸

3 ۰/۱۷۲

2 ۰/۱۶۸

1 ۰/۱۶۲

گزینه ۲

قرار می‌دهیم:

B : پیشامد مضرب ۶ بودن

A : پیشامد مضرب ۴ بودن

به دو مورد توجه کنید:

- تعداد عددهای از ۱ تا ۵۰۰ که مضرب ۴ هستند، تقسیم (صحیح) ۵۰۰ بر ۴ است.
- $\frac{500}{4} = 125 \Rightarrow n(A) = 125$ و $\frac{500}{6} \cong 83/3 \Rightarrow n(B) = 83$
- $A \cap B$ شامل عددهایی است که هم مضرب ۴ و هم مضرب ۶ هستند؛ یعنی مضرب کم‌کم این دو عدد، یعنی ۱۲ هستند:

$$\frac{500}{12} = 41/6 \Rightarrow n(A \cap B) = 41$$

احتمال این که عدد مضرب ۴ باشد و مضرب ۶ نباشد، همان $P(A - B)$ است. طبق قوانین:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{125}{500} - \frac{41}{500} = \frac{84}{500} = 0/168$$

از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این عدد مضرب ۹ یا مضرب ۶ است؟

4 ۰/۳۳

3 ۰/۲۵

2 ۰/۱۵

1 ۰/۲۲

گزینه ۱

قرار می‌دهیم:

B : پیشامد مضرب ۶ بودن

A : پیشامد مضرب ۹ بودن

احتمال خواسته شده $P(A \cup B)$ است که مشابه تست قبل محاسبه می‌شود:



$$\frac{200}{9} = 22/2 \Rightarrow n(A) = 22 \quad \text{و} \quad \frac{200}{6} = 33/3 \Rightarrow n(B) = 33$$

$A \cap B$ شامل عددهایی است که مضرب ک.م.م دو عدد ۹ و ۶ یعنی ۱۸ هستند:

$$\frac{200}{18} = 11/1 \Rightarrow n(A \cap B) = 11$$

بنابراین:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{22}{200} + \frac{33}{200} - \frac{11}{200} = \frac{44}{200} = 0/22$$



نکته ۲۶

تکنیک متمم:

فرض کنید A یک پیشامد باشد. متمم آن چنین است:

$$A' = S - A$$

یعنی: تمام عضوهای S به جز عضوهای A . در این صورت:

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{و} \quad P(A) = 1 - P(A')$$

برای نمونه:

در پرتاب یک تاس، متمم این که عدد شش ظاهر شود، $\{1, 2, \dots, 5\}$ است. (یعنی مخالف پیشامد اولیه)

مهم:

رابطه‌ی $P(A) = 1 - P(A')$ هنگامی که محاسبه‌ی مستقیم $P(A)$ طولانی یا دشوار باشد، معمولاً راهگشا است.

❓ در پرتاب چهار سکه با هم، چقدر احتمال دارد که لااقل یک سکه «رو» ظاهر شود؟

④ $\frac{15}{16}$

③ $\frac{14}{16}$

② $\frac{13}{16}$

① $\frac{12}{16}$

گزینه ۴ ✓

چون در حالت‌های زیادی شرط «لااقل یک سکه رو» برقرار است، خلاف آن را در نظر می‌گیریم:

A' : پیشامد هیچ رو ظاهر نشود.

فقط یک حالت هست که همه پشت بیایند: $n(A') = 1$. در نتیجه:

$$P(A') = \frac{1}{2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{16} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$



ورودی سمپاد دهم: ۱۴۰۰

در پرتاب دو تاس، احتمال این که حاصل جمع اعداد رو شده بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام است؟

④ $\frac{9}{11}$

③ $\frac{5}{6}$

② $\frac{17}{18}$

① $\frac{11}{12}$



گزینه ۱

کل حالات ممکن $6 \times 6 = 36$ مورد است. متمم حالت مورد نظر را در نظر می‌گیریم؛
 A' : پیشامد جمع دو عدد کوچک‌تر یا مساوی ۳
 فقط سه حالت؛ $(1,1), (1,2), (2,1)$ وجود دارد. در نتیجه؛

$$P(A') = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

--- ---

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۳۹۷

نگار یک عدد دو رقمی به تصادف انتخاب کرده است. احتمال این که حاصل ضرب ارقام عددی زوج باشد، چقدر است؟

④ $\frac{13}{18}$

③ $\frac{7}{14}$

② $\frac{2}{8}$

① $\frac{3}{4}$

گزینه ۴

با روشی که در بالاتر دیدیم، تعداد کل اعداد دو رقمی: $9 \times 10 = 90$

توجه کنید:

محاسبه‌ی تعداد حالاتی که ضرب ارقام فرد باشد، آسان‌تر است؛ باید هر دو رقم فرد باشند؛

$$5 \times 5 = 25$$

پس:

$$P(A') = \frac{25}{90} = \frac{5}{18} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$$

--- ---

از مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 200\}$ عددی انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که آن نه بر ۶ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۹؟

④ $0/78$

③ $0/72$

② $0/68$

① $0/88$

گزینه ۴

چون پاسخ‌گویی مستقیم کمی مشکل است، خلاف آن را در نظر می‌گیریم؛

A' : پیشامد این که عدد لاقبل بر ۶ یا ۹ بخش‌پذیر باشد.

کمی قبل‌تر در یک تست دیدیم که $P(A') = 0/22$ است و در نتیجه؛

$$P(A) = 1 - 0/22 = 0/78$$

--- ---

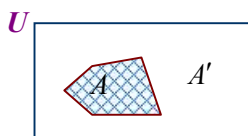
مفهوم کلی متمم مجموعه که بالاتر برای پیشامدها بیان شد را به صورت کلی و مختصر مرور می‌کنیم:

مرجع و متمم:

مجموعه‌ی «مرجع» با نماد U (گاهی M)، مجموعه‌ای است که:

اعضای همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث ما در آن قرار دارند.

به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌ی U محسوب می‌شوند.



بعلاوه:

مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «**متمم**» A گوئیم:

$$A' = U - A$$

برای نمونه:

متمم مجموعه‌ی $A = \mathbb{N}$ را در دو حالت زیر می‌بینید:

① اگر $U = W$ باشد.

$$A' = W - \mathbb{N} = \{0\}$$

② اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد.

$$A' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$$

با قدری دقت و توجه به شکل بالا، موارد زیر درک و فهمیده می‌شوند:

نکته ۲۷

در مورد هر مجموعه‌ی A ، موارد زیر همیشه درست هستند:

$$(A')' = A \quad \text{و} \quad A \cap A' = \emptyset \quad \text{و} \quad A \cup A' = U$$

بعلاوه:

▪ همیشه $\emptyset' = U$ است، زیرا:

$$\emptyset' = U - \emptyset = U$$

▪ همیشه $U' = \emptyset$ است، زیرا:

$$U' = U - U = \emptyset$$

ورودی سمپاد دهم؛ ۱۴۰۲

اگر \mathbb{Z} مجموعه اعداد صحیح و $A \subseteq \mathbb{Z}$ ، آنگاه تعریف می‌کنیم: $-A = \mathbb{Z} - A$. چه تعداد از موارد زیر صحیح است؟

$$-(A \cup B) = (-A) \cup (-B) \quad A \cup (-A) = A \quad A \cap (-A) = \emptyset \quad -(-A) = A$$

۴ ④

۱ ③

۳ ②

۲ ①

گزینه ۱

می‌بینید که \mathbb{Z} به عنوان مرجع داده شده و $-A$ همان مفهوم متمم A' است. بنابراین روابط بالا از راست به چپ:

اولی $(A')' = A$ درست، دومی $A \cap A' = \emptyset$ درست و سومی $A \cup A' = A$ نادرست است. (حاصل اجتماع: \mathbb{Z})

مورد چهارم $(A \cup B)' = A' \cup B'$ است که با بیان دو نمونه‌ی ساده به راحتی رد می‌شود.

اگر $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ و $B = \{-1, -2, -3, \dots\}$:

$$(A \cup B)' = \{0\} \quad \text{و} \quad A' \cup B' = \{0, -1, -2, -3, \dots\} \cup \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}$$



❓ اگر $A \subseteq B$ ، کدام نادرست است؟



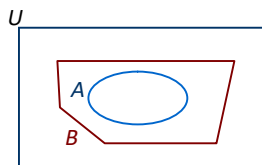
$A' \cup B = U$ ④

$B' \subseteq A'$ ③

$A' \cap B = \emptyset$ ②

$A \cap B' = \emptyset$ ①

گزینه ۲



با استفاده از شکل به آسانی می‌توانید ببینید که:
هر قدر مجموعه کوچک‌تر باشد، متمم آن بزرگ‌تر است.

یعنی: $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

ضمناً، با نگاه به شکل واضح است که گزینه‌های اول و چهارم نیز صحیح هستند، ولی مورد دوم درست نیست.





۱- کدام یک از عبارتهای زیر تشکیل مجموعه نمی‌دهد؟

- ① اعداد صحیح کمتر از -21
 ② اعداد طبیعی کمتر از 0
 ③ بزرگ‌ترین پنج عدد فرد دو رقمی
 ④ سه عدد زوج متوالی

۲- مجموعه‌ی عددهای صحیح بین $13 - \sqrt{13}$ و $-17 + \sqrt{17}$ کدام است؟

- ① $\{8, -10, \dots, -11\}$
 ② $\{9, -11, \dots, -12\}$
 ③ $\{9, -12, \dots, -13\}$
 ④ $\{10, -12, \dots, -13\}$

۳- اگر $x \in \mathbb{Z}$ و $-x \in A$ درست باشد، آنگاه مجموعه‌ی A کدام یک از موارد زیر نمی‌تواند باشد؟

- ① \mathbb{Z}
 ② \mathbb{Q}
 ③ \mathbb{R}
 ④ \mathbb{N}

۴- مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ چند زیرمجموعه دارد؟

- ① ۱
 ② ۲
 ③ ۴
 ④ بی‌شمار

۵- مجموعه‌ی $\{a, a, \dots, a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{\{a, a\}\}, \{\{a\}\}\}$ چند عضو دارد؟

- ① ۳
 ② ۴
 ③ ۵
 ④ ۶

۶- مجموع عضوهای مجموعه‌ی $A = \{2, 5, 8, \dots, 59\}$ کدام است؟

- ① ۶۲۰
 ② ۶۱۰
 ③ ۶۱۸
 ④ ۶۰۰

۷- مجموعه‌ی جواب‌های صحیح معادله‌ی $x^2 + 8 = 0$ کدام است؟

- ① $\{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\}$
 ② $\{4, -4\}$
 ③ \emptyset
 ④ $\{4\}$

۸- کدام گزاره نادرست است؟

- ① مجموعه اعداد طبیعی فرد نسبت به عمل جمع بسته است.
 ② مجموعه اعداد طبیعی زوج نسبت به عمل ضرب بسته است.
 ③ مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل ضرب بسته است.
 ④ مجموعه اعداد صحیح نسبت به عمل جمع بسته است.

۹- مجموعه‌ی اعداد طبیعی مربع کامل نسبت به کدام یک از موارد زیر بسته است؟

- ① جمع
 ② ضرب
 ③ تفریق
 ④ تقسیم

۱۰- کدام یک از اعداد زیر نمی‌تواند عضو مجموعه‌ی $A = \{x \mid x = \frac{2k-1}{3k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$ باشد؟



$\frac{9}{16}$ 4

$\frac{17}{28}$ 3

$\frac{20}{31}$ 2

$\frac{23}{37}$ 1

۱۱- کدام مجموعه‌ی زیر نمایش ریاضی مجموعه‌ی $\{7, 77, 777, \dots\}$ است؟

$\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{Z}\}$ 2 $\{7 \times \frac{10^x + 1}{9} \mid x \in \mathbb{N}\}$ 1

$\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{N}\}$ 4 $\{7 \times \frac{10^x - 1}{9} \mid x \in \mathbb{W}\}$ 3

۱۲- نمایش ریاضی مجموعه‌ی $A = \{-26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26\}$ کدام است؟

$\{x \in \mathbb{W} \mid -26 \leq x \leq 26\}$ 2 $\{x \in \mathbb{Z} \mid -26 \leq x \leq 26\}$ 1

$\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x}{26} \in \mathbb{Z}\}$ 4 $\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{26}{x} \in \mathbb{Z}\}$ 3

۱۳- مجموعه‌ی $\{-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 2 $\{(-1) \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 1

$\{(-1)^n \times n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 4 $\{(-n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 3

۱۴- مجموعه‌ی $\{2^{xy} \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 5\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$\{x \mid x^2 = 64\}$ 2 $\{2, 4, 8, 16\}$ 1

$\{\}$ 4 $\{64, 16\}$ 3

۱۵- نمایش ریاضی مجموعه‌ی $A = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$ کدام است؟

$\{-2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ 2 $\{-x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$ 1

$\{(-1)^{2x} \times 2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ 4 $\{(-2)^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ 3

۱۶- مجموعه‌ی $A = \{2^{x-3y} \mid x-1 = 3y\}$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$\{2\}$ 2 $\{16\}$ 1

$\{5, -5\}$ 4 $\{32\}$ 3

۱۷- مجموعه‌ی $A = \{2^{1+2}, 2^{1+4}, 2^{1+6}, \dots, 2^{1+2^k}\}$ چند عضو دارد؟

2^9 4

2^{10} 3

2^{11} 2

2^{12} 1

۱۸- مجموعه‌ی $\{\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq 2, y \leq 2\}$ چند زیر مجموعه دارد؟

8 4

2 3

4 2

16 1

۱۹- مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۱۱ چند زیر مجموعه دارد که حداقل یکی از اعداد ۲ یا ۳ را دارند. ولی قطعاً دو عضو

۵ و ۶ را ندارند؟



۲۰۸ ④

۶۴ ③

۱۹۲ ②

۲۵۶ ①

۲۰- مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 99\}$ چند زیر مجموعه‌ی دو عضوی به شکل $\{x, x+2\}$ دارد؟

۹۹ ④

۹۸ ③

۹۷ ②

۹۶ ①

۲۱- در چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 20\}$ حداکثر ۹ عدد فرد وجود دارد؟

$2^{20} - 2^{10}$ ④

2^{10} ③

2^{11} ②

$2^{20} - 2^9$ ①

۲۲- در چند زیر مجموعه از مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ مجموع بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عضو برابر ۱۱ است؟

۳۵۲ ④

۳۴۱ ③

۳۲۸ ②

۳۲۰ ①

۲۳- در مجموعه‌ی اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ چند زیرمجموعه می‌توان نوشت که بزرگ‌ترین عضو ۲ برابر کوچک‌ترین عضو آن باشد؟

۱۰۲۴ ④

۱۰۲۳ ③

۵۱۲ ②

۵۱۱ ①

۲۴- تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+3$ عضوی چند برابر تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n-1$ عضوی است؟

۳۲ ④

۱۶ ③

$n+4$ ②

۸ ①

۲۵- اگر $\{ax - 5, 25 - 3x\} = \{a\}$ باشد، a چقدر است؟

$\frac{5}{2}$ ④

$\frac{25}{3}$ ③

۷ ②

۶ ①

۲۶- A مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۴ و B مجموعه شمارنده‌های عدد ۱۲ است. $A \cap B$ کدام است؟

$\{1, 2, 4\}$ ②

$\{1, 2\}$ ①

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 14\}$ ④

$\{1, 12, 14\}$ ③

۲۷- اگر $A = \{1, \{2\}\}$ و $B = \{2, \{1\}\}$ باشد تعداد زیر مجموعه‌های $A \cap B$ کدام است؟

۱ ④

۱۶ ③

۴ ②

۲ ①

۲۸- A و B دو مجموعه هستند. اگر $A \cup B = A$ باشد، همواره داریم:

$B = \emptyset$ ④

$A = B$ ③

$B \subseteq A$ ②

$A \subseteq B$ ①

۲۹- فرض کنید A_n نشان دهنده‌ی مجموعه مقسوم علیه‌های طبیعی عدد n باشد. مجموعه‌ی زیر چند عضو دارد؟

$$A_{51} \cup A_{52} \cup \dots \cup A_{100}$$

۳۷۷۵ ④

۲۰۰ ③

۱۰۰ ②

۵۰ ①



۳۰- کدام مورد نادرست است؟

- $\mathbb{N} \cup W \subseteq W$ ①
 $\mathbb{N} \cap W \subseteq W$ ②
 $\mathbb{Z} \cup W \subseteq W$ ③
 $\mathbb{Z} \cap W \subseteq W$ ④

۳۱- اگر به مجموعه A سه عضو جدید اضافه شود، به تعداد زیر مجموعه‌های آن 448 مجموعه اضافه می‌شود. مجموعه‌ی A چند عضوی است؟

- ① ۶ ② ۵ ③ ۴ ④ ۳

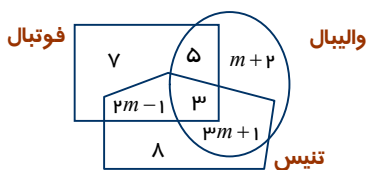
۳۲- A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی و $(A \cup B) \subseteq B$ است. آنگاه:

- ① $A \cap B = \emptyset$ ② $B \subseteq A$ ③ $A \cap B = B$ ④ $A \cap B = A$

۳۳- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{2, 3, 4, 5\}$ باشند، چند مجموعه X در رابطه $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$ صدق می‌کند؟

- ① ۲ ② ۴ ③ ۶ ④ ۸

۳۴- با توجه به نمودار زیر، اگر تعداد افرادی که تنها به یک ورزش علاقه دارند ۲۱ نفر باشد، چند نفر تنها به ۲ ورزش علاقه‌مند هستند؟



- ① ۳۰
 ② ۲۸
 ③ ۲۵
 ④ ۲۲

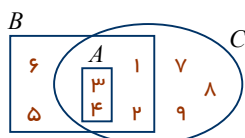
۳۵- تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر و یا مساوی با ۱۰۰۰ که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیرند، کدام است؟

- ① ۶۸۸ ② ۶۸۶ ③ ۳۱۴ ④ ۶۵۸

۳۶- در یک کلاس ۴۲ نفره، ۱۸ نفر ورزش نمی‌کنند و ۲۱ نفر هم به اردو نمی‌روند. اگر ۲ نفر هم ورزش نکنند و هم اردو نروند، چند نفر هم ورزش می‌کنند و هم اردو می‌روند؟

- ① ۱ ② ۳ ③ ۵ ④ ۷

۳۷- با توجه به شکل، مجموعه‌ی $(A - B) \cup (C - A)$ چند عضو دارد؟



- ① ۳ ② ۴
 ③ ۵ ④ ۶

۳۸- مجموعه‌ی $[A \cap B \cap (A - B)] \cup A$ کدام است؟

- ① A ② B ③ $A - B$ ④ \emptyset

۳۹- کدام مجموعه با پایان است؟

- ① $W - \mathbb{N}$ ② $\mathbb{Z} - W$ ③ $W \cap \mathbb{N}$ ④ $\mathbb{Z} \cap W$



۴۰- اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

- ① $A \cap B$ ② $(A - B) - A$ ③ $A - B$ ④ $B - A$

۴۱- اگر پنج سکه را با پنج تاس بیندازیم، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای آن به صورت عدد توان‌دار در کدام گزینه آمده است؟

- ① 2×6^5 ② 12^5 ③ $2^5 \times 6$ ④ 5^{12}

۴۲- اگر $P(A) = \frac{5}{2}$ و $n(A) = 8$ و $n(B) = 5$ باشد، مقدار $P(B)$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{13}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{8}{10}$ ④ $\frac{5}{13}$

۴۳- دو تاس را با هم انداختیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده عددی اول است؟

- ① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{5}{9}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{12}$

۴۴- روی وجه‌های یک مکعب عددهای $3-2-1-0$ و 1 و 2 را نوشته‌ایم. مکعب را دو بار می‌اندازیم. احتمال این که حاصل ضرب دو عددی که به دست آورده‌ایم منفی باشد، کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{11}{36}$ ③ $\frac{13}{36}$ ④ $\frac{1}{3}$

۴۵- علی رقم‌های 1 تا 9 را روی 9 کارت نوشته و در کیسه‌ای می‌اندازد. سپس 4 کارت از آن پی در پی و بدون جایگذاری خارج می‌کند و آن‌ها را به ترتیب بیرون آمدن کنار هم قرار می‌دهد. احتمال آن که عدد چهار رقمی به دست آید که اختلاف رقم یکان و هزارگان آن 4 باشد، کدام است؟

- ① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{5}{36}$ ③ $\frac{5}{72}$ ④ $\frac{5}{27}$

۴۶- اتاقی داریم که کف آن از کاشی‌های مربع شکل پوشیده شده است. طول اتاق شامل 8 و عرض آن شامل 5 کاشی است. اگر یکی از کاشی‌ها را به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال آن که این کاشی، کاشی کنج یا کناره‌های اتاق باشد، کدام است؟

- ① $\frac{19}{40}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{21}{40}$

۴۷- در مورد مجموعه‌ها می‌دانیم $A \cap X = B \cap X$. چند مورد قطعاً درست هستند؟

$$A = B \quad A \cup X = B \cup X \quad X - B = X - A \quad X \subseteq (A \cap B)$$

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 2

۴۸- از مجموعه‌ی $\{100, 101, 102, \dots, 600\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌شود. چقدر احتمال دارد مضرب 4 یا مضرب 9 باشد؟

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{13}{36}$ ④ $\frac{8}{36}$



۴۹- برای مجموعه‌های دلخواه A_1, A_2, \dots ، قرار می‌دهیم:

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n \geq 2 \quad \text{و} \quad B_1 = A_1$$

کدام الزاماً درست است؟

- ۱ برای $n \neq m$ داریم $B_n \cap B_m = \emptyset$.
 ۲ $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$
 ۳ $A_n \cap [A_n \cup B_n] = A_n$
 ۴ هر سه مورد صحیح

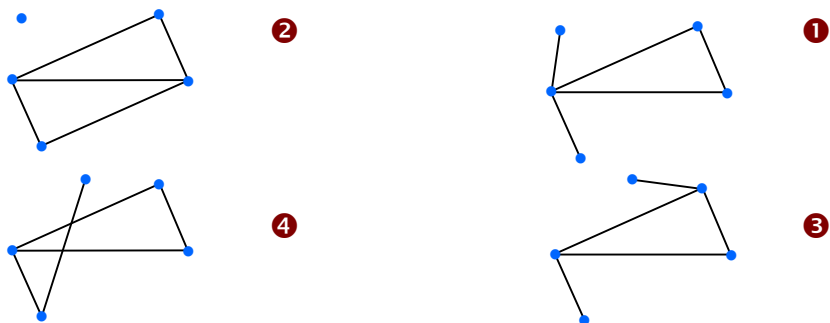
۵۰- مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ چند زیر مجموعه سه عضوی دارد که جمع عضوهای آن برابر با ۱۵ و عدد ۴ عضو هر کدام باشد؟

- ۱ ۴
 ۲ ۳
 ۳ ۳
 ۴ چنین زیر مجموعه‌ای وجود ندارد.

۵۱- اگر $B = \{3, 4\}$ و $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، برای مجموعه‌ی A چند جواب وجود دارد؟

- ۱ ۱
 ۲ ۲
 ۳ ۴
 ۴ ۸

۵۲- پنج مجموعه‌ی دو عضوی غیر مساوی داریم. در گزینه‌های زیر، هر نقطه یکی از این مجموعه‌ها را نمایش می‌دهد. اگر اشتراک دو مجموعه تهی نباشد، نقاط مربوط به آن‌ها را به هم وصل کرده‌ایم. کدام یک از اشکال زیر نمی‌تواند مربوط به این پنج مجموعه باشد؟ (ورودی سمپاد ۱۳۹۶)



۵۳- مجموعه‌ی $\{5, 7, 9, \dots, 137\}$ چند عضو بیشتر از مجموعه‌ی $\{3, 7, 11, \dots, 123\}$ دارد؟

- ۱ ۳۸
 ۲ ۳۶
 ۳ ۳۴
 ۴ ۳۳

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴