۱۱

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

ریاضی یازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

ریاضی یازدهم تجربی

۱

هندسه تحلیلی و جبر

۱ هندسه تحلیلی

یادآوری:

معادله‌ی هر خط بر حسب x و y از درجه‌ی یک است، مانند:

$$2x+y=-3 \qquad \text{یا} \qquad x+2=1 \qquad \text{یا} \qquad 2y=-3$$

یک کار معمول برای خط‌ها، نمایش هندسی آن‌ها است:

روش رسم:

چون از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد:

رسم خط، با تعیین مختصات دو نقطه روی آن انجام می‌شود.

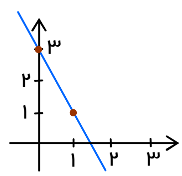
برای نمونه؛

خط به معادله‌ی $y=-2x+3$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، جای x دو عدد دلخواه قرار داده و y را مشخص می‌کنیم؛ با نمایش نقاط حاصل در دستگاه، خط رسم می‌شود:

$$x=0: \quad y=-2(0)+3=3$$
$$x=1: \quad y=-2(1)+3=1$$

⇨

x	۰	۱
y	۳	۱



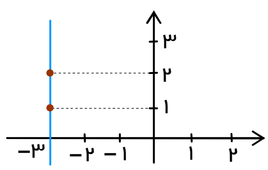
مثال: خط‌های $x=-3$ و $2y-4=0$ را رسم کنید.

پاسخ

در معادله‌ی $x=-3$ حرف y وجود ندارد؛ یعنی:

مقدار x فقط می‌تواند -3 باشد، ولی مقدار y هر عدد دلخواهی است.

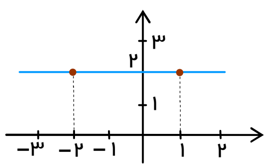
برای مثال، نقاط $(-3,1)$ و $(-3,2)$ روی خط قرار داشته و خط رسم می‌شود:



به صورت مشابه؛ در معادله‌ی $2y-4=0$ داریم:

$$2y-4=0 \rightarrow 2y=4 \Rightarrow y=\frac{4}{2}=2$$

در معادله‌ی $y=2$ مقدار x هر عددی می‌تواند باشد، ولی y فقط ۲ است:



(نقاط $(-2,2)$ و $(1,2)$ روی خط هستند.)

برخورد خط با محورها:

دو عدد مهم در مورد خط‌ها:

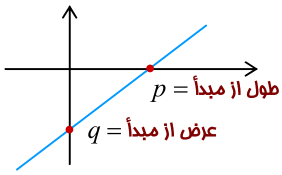
- **عرض از مبدأ:**

این عدد (q) عرض نقطه‌ای است که خط در آن محور y را قطع کرده. نقطه‌ی مربوطه: $(0, q)$

- **طول از مبدأ:**

این عدد (p) طول نقطه‌ای است که خط در آن محور x را قطع کرده. نقطه‌ی مربوطه: $(p, 0)$

هر دو مقدار در شکل دیده می‌شوند:



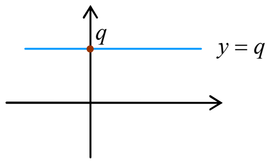
روش محاسبه:

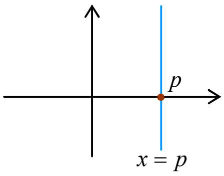
در معادله قرار می‌دهیم: $y = 0$ $\Leftarrow$ جواب x، طول از مبدأ خط است.

در معادله قرار می‌دهیم: $x = 0$ $\Leftarrow$ جواب y، عرض از مبدأ خط است.

حالت‌های خاص:

خط افقی، طول از مبدأ نداشته و خط عمودی، عرض از مبدأ ندارد.





مثال: عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $l: \ -5x + 2y = 4$ را مشخص کنید.

پاسخ

طبق روش بالا:

$x = 0 : \quad -5(0) + 2y = 4 \rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$ عرض از مبدأ

$y = 0 : \quad -5x + 2(0) = 4 \rightarrow -5x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{5}$ طول از مبدأ

شیب خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت تغییر عرض نقاط به تغییر طول نقاط را شیب آن خط می‌گویند.

یعنی:

اگر دو نقطه‌ی دلخواه $(x_۱,y_۱)$ و $(x_۲,y_۲)$ از خط داده شوند، شیب خط برابر عدد ثابت زیر است:

$$\boxed{m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}} \qquad (x_۱\neq x_۲)$$

برای نمونه؛

شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $(۲,-۱)$ و $(۰,۲)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\underbrace{۲}_{x_۱},\underbrace{-۱}_{y_۱})\ ,\ (\underbrace{۰}_{x_۲},\underbrace{۲}_{y_۲}) \Rightarrow m=\frac{۲-(-۱)}{۰-۲}=\frac{۳}{-۲} \Rightarrow m=-\frac{۳}{۲}$$

مثال: خطی محورهای مختصات را در طول ۲ و عرض ۳− قطع کرده است. شیب آن را بیابید.

پاسخ

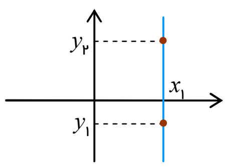
نقطه‌ی به طول ۲ روی محور طول‌ها یعنی $(۲,۰)$ و نقطه‌ی با عرض ۳− روی محور عرض یعنی $(۰,-۳)$. پس شیب چنین است:

$$m=\frac{۰-(-۳)}{۲-۰}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید:

چند مطلب مرتبط با شیب خط‌ها:

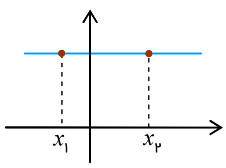
- اگر طول‌های دو نقطه روی خط برابر باشند، یعنی: $x_۱=x_۲$، مقدار شیب $m=\frac{y_۲-y_۱}{۰}$ تعریف نمی‌شود. این حالت فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:



پس:

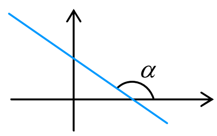
در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

- اگر عرض‌ها برابر باشند: $y_۱=y_۲$، آنگاه شیب برابر $m=\frac{۰}{x_۲-x_۱}=۰$ است. این حالت فقط در مورد خط‌های افقی رخ می‌دهد. پس:

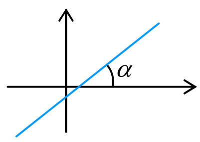


شیب هر خط افقی برابر صفر است.

- شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:



شیب منفی $m=\tan\alpha$



شیب مثبت $m=\tan\alpha$

نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

مثال: خط l به معادله‌ی $l:\ \text{۳}x-y=\text{۱}$ بوده و خط l' با آن موازی است. شیب l' را تعیین کنید.

پاسخ

شیب خط l را توسط انتخاب دو نقطه روی آن مشخص می‌کنیم:

$$\text{۳}x-y=\text{۱} \to y=\text{۳}x-\text{۱} \begin{cases} x=\text{۰} \to & y=\text{۳}(\text{۰})-\text{۱}=-\text{۱} \to (\text{۰},-\text{۱}) \\ x=\text{۱} \to & y=\text{۳}(\text{۱})-\text{۱}=\text{۲} \to (\text{۱},\text{۲}) \end{cases} \Rightarrow m=\frac{\text{۲}-(-\text{۱})}{\text{۱}-\text{۰}}=\text{۳}$$

چون $m_l=\text{۳}$ است، پس شیب خط موازی آن l' هم برابر ۳ خواهد بود.

توجه کنید:

چنان‌که در پاسخ مثال قبل هم دیده می‌شود، اگر معادله‌ی خط را به صورت مرتب شده‌ی $y=ax+b$ بنویسیم، عدد a، یعنی ضریب x، همان شیب (و b عرض از مبدأ) خط است. بنابراین؛

برای تعیین شیب خطی چون $\text{۲}x-\text{۳}y=\text{۶}$، از این پس مانند زیر، $+y$ را تنها می‌کنیم:

$$-\text{۳}y=-\text{۲}x+\text{۶} \xrightarrow{\div(-\text{۳})} y=\frac{\text{۲}}{\text{۳}}x-\text{۲} \Rightarrow \quad (\text{شیب برابر } \tfrac{\text{۲}}{\text{۳}} \text{ است.})$$

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب: m و **مختصات یک نقطه روی آن:** $(x_\circ, y_\circ)$

با این اطلاعات؛ معادله‌ی خط را به صورت $y=mx+h$ (h مجهول است.) نوشته و با جایگذاری مختصات $(x_\circ, y_\circ)$ در معادله، مقدار h را معلوم می‌کنیم.

روش دوم:

معادله‌ی خط را می‌توانید یک‌باره به صورت زیر بنویسید:

$$\boxed{y-y_\circ=m(x-x_\circ)}$$

زیرا:

وقتی (x,y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب، باید:

$$m=\frac{y-y_\circ}{x-x_\circ} \Rightarrow y-y_\circ=m(x-x_\circ)$$

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(\text{۲},-\text{۱})$ و $(\text{۰},\text{۲})$ را بنویسید.

پاسخ

شیب خط را مشخص می‌کنیم:
$$m=\frac{۲-(-۱)}{۰-۲}=\frac{۳}{-۲}\ \Rightarrow\ m=-\frac{۳}{۲}$$

معادله را به صورت $y=-\frac{۳}{۲}x+h$ نوشته و یکی از نقاط را در آن جایگزین می‌کنیم:
$$(۰,۲)\ \rightarrow\ ۲=-\frac{۳}{۲}(۰)+h\ \xrightarrow{h=۲}\ y=-\frac{۳}{۲}x+۲$$
$$\xrightarrow{\times ۲}\ ۲y=-۳x+۴$$

---✧---

مثال: معادلهٔ خط با عرض از مبدأ ۲ و طول از مبدأ -۱ را بنویسید.

پاسخ

طبق اطلاعات داده شده، خط از نقاط $(۰,۲)$ و $(-۱,۰)$ گذشته است. پس: $m=\frac{۰-۲}{-۱-۰}=۲$ بوده و معادله:
$$y-۰=۲(x-(-۱))\ \Rightarrow\ y=۲x+۲$$

---✧---

مثال: معادلهٔ خطی بنویسید که از نقطهٔ $(-۳,۱)$ گذشته و محور افقی را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

پاسخ

نقطهٔ روی محور افقی $(۲,۰)$ است. مانند قبل: $m=\frac{۰-۱}{۲-(-۳)}=-\frac{۱}{۵}$ است و در نتیجه:
$$y=-\frac{۱}{۵}x+h\ \xrightarrow{(۲,۰)}\ ۰=-\frac{۲}{۵}+h\ \xrightarrow{h=\frac{۲}{۵}}\ y=-\frac{۱}{۵}x+\frac{۲}{۵}$$

---✧---

مثال: معادلهٔ خط گذرا بر دو نقطهٔ $(۲,-۱)$ و $(۲,۰)$ را بنویسید.

پاسخ

توجه کنید:

طول‌های دو نقطه برابر است، یعنی خط عمودی بوده و شیب آن تعریف نشده است. اکنون:

چون خط عمودی است و باید از نقطه‌ای به طول ۲ عبور کند، معادله‌اش $x=۲$ است.

---✧---

مثال: معادلهٔ خطی بنویسید که با خط $l:\ ۳x-y=۱$ موازی بوده و از مبدأ عبور کند.

پاسخ

خط به صورت $y=۳x-۱$ بوده؛ پس شیب آن برابر ۳ است و در نتیجه:

خط مورد نظر نیز دارای شیب ۳ بوده و باید از نقطهٔ $(۰,۰)$ عبور کند.

معادلهٔ آن خط:
$$y-۰=۳(x-۰)\ \Rightarrow\ y=۳x$$

---✧---

مثال: خطی گذرا از نقطه‌ی $(-1,2)$ و موازی خط $l:\ 3x+y=1$، محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟

پاسخ

شیب خط مورد نظر باید برابر شیب l، یعنی -3 باشد. معادله‌ی آن به صورت $y=-3x+q$ بوده و چون نقطه‌ی $(-1,2)$ روی خط است:

$$2=-3(-1)+q \ \rightarrow\ q=-1$$

پس معادله‌ی خط $y=-3x-1$ است. در نقطه‌ی تقاطع خط با محور طول، باید $y=0$ باشد:

$$y=0 \ \rightarrow\ 0=-3x-1 \ \rightarrow\ 3x=1 \ \Rightarrow\ x=\frac{1}{3}$$

---✧---

نوشتن فوری معادله:

اگر شیب خط m و عرض از مبدأ خط، عدد q را داشته باشیم، معادله‌ی خط یک‌باره نوشته می‌شود:

$$y=mx+q \qquad \text{(چرا!؟)}$$

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $3x-6y=1$ را بیابید.

پاسخ

باید: y را در سمت چپ تنها کرده و ضریب آن به $+1$ تبدیل گردد:

$$3x-6y=1 \ \rightarrow\ -6y=-3x+1 \ \xrightarrow{\div(-6)}\ y=\frac{-3}{-6}x+\frac{1}{-6}$$

معادله به صورت $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{6}$ ساده می‌شود و بنابراین: $m=\frac{1}{2}$ شیب خط و $q=-\frac{1}{6}$ عرض از مبدأ خط است.

---✧---

مثال: معادله‌ی خطی موازی خط $l:\ -2x-y=3$ و دارای عرض از مبدأ -5 را بنویسید.

پاسخ

شیب خط l را مشخص می‌کنیم:

$$-2x-y=3 \ \rightarrow\ -y=2x+3 \ \xrightarrow{\div(-1)}\ y=-2x-3$$

شیب خط مورد نظر $m=-2$ بوده و با داشتن $q=-5$، معادله‌ی آن نوشته می‌شود:

$$y=-2x-5$$

---✧---

خط‌های عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m\times m'=-1 \ \Rightarrow\ m'=-\frac{1}{m}$$

بنابراین:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا شیب خط عمود (m') حاصل شود.

توجه کنید:

در مطلب بالا، خط‌ها باید موازی محورهای مختصات نباشند. (در آن حالت، معادله عمود بدیهی است. چرا؟!)

مثال: (مشابه کتاب) وضعیت هر جفت از خط‌های داده شده را مشخص کنید.

الف) $2y+1=0$ و $x=2$.

ب) $x-2y=1$ و $y=2x-3$.

پ) $3x-2y=0$ و $y=-\frac{2}{3}x+4$.

پاسخ

الف) خط اول به صورت $y=-\frac{1}{2}$، خطی افقی و خط دوم $x=2$، خطی عمودی است. پس دو خط بر هم عمود هستند.

ب) تعیین شیب خط اول:

$$-2y=-x+1 \xrightarrow{\div(-2)} y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \Rightarrow m_1=\frac{1}{2}$$

شیب خط دوم $m_2=2$ بوده و در نتیجه خط‌ها متقاطع (غیر عمود) هستند.

پ) شیب خط‌ها $m_1=\frac{3}{2}$ و $m_2=-\frac{2}{3}$ تعیین می‌شوند. پس دو خط بر هم عمود هستند:

$$m_1\times m_2=\frac{3}{2}\times(-\frac{2}{3})=-1$$

مثال: (از کتاب) خط l به معادله‌ی $2y-3x=1$ و خط d با عرض از مبدأ 5 به معادله‌ی $y=mx+5$ را در نظر بگیرید.

الف) m را طوری بیابید که خط d با خط l موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمود هستند؟

پاسخ

الف) چون $m_l=\frac{3}{2}$ و $m_d=m$ است، باید $m=\frac{3}{2}$ باشد.

ب) طبق شرط عمود بودن خط‌ها:

$$m_l\times m_d=-1 \to \frac{3}{2}\times m=-1 \Rightarrow m=-\frac{2}{3}$$

مثال: خطی گذرنده از نقطه‌ی $(1,-2)$ و عمود بر خط $2y+x=1$، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

پاسخ

شیب خط داده شده برابر $m=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید. تعیین شیب خط عمود:

$$-\frac{۱}{۲}\times m'=-۱ \;\rightarrow\; m'=\frac{-۱}{-\frac{۱}{۲}}=۲ \;\rightarrow\; m'=۲$$

نوشتن معادله‌ی خط با استفاده از نقطه‌ی داده شده:

$$y-(-۲)=۲(x-۱) \;\rightarrow\; y+۲=۲x-۲ \;\Rightarrow\; y=۲x-۴$$

عرض از مبدأ این خط خواسته شده که -۴ است.

---✧---

مثال: (از کتاب) مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(۵,۱)$ و $B(۱۰,۴)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ضلع AB را بنویسید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

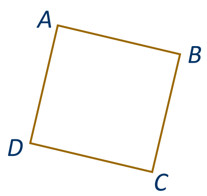
پ) اگر مختصات C به صورت $(۷,۹)$ باشد، مختصات رأس D را تعیین کنید.

پاسخ

الف) معادله‌ی این ضلع توسط شیب و نقطه‌ی A نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\frac{۴-۱}{۱۰-۵}=\frac{۳}{۵} \\ (\underbrace{۵}_{x_0},\underbrace{۱}_{y_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow\; y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۵) \xrightarrow{\times ۵} ۵y-۵=۳x-۱۵ \;\Rightarrow\; -۳x+۵y=-۱۰$$

ب) چون AD بر ضلع AB عمود است، شیب آن با معکوس و قرینه کردن $m_{AB}=\frac{۳}{۵}$ حاصل می‌شود:



$$m_{AB}=\frac{۳}{۵} \;\Rightarrow\; m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$$

معادله‌ی ضلع AD:

$$y-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵) \xrightarrow{\times ۳} ۳y-۳=-۵x+۲۵ \;\Rightarrow\; ۵x+۳y=۲۸$$

پ) معادله‌ی DC که موازی AB است، به آسانی نوشته می‌شود: $۵y-۳x=۲۴$. اکنون کافی است خط‌های AD و DC را تقاطع دهیم، یعنی جواب دستگاه زیر:

$$\left.\begin{array}{l} ۵x+۳y=۲۸ \\ ۵y-۳x=۲۴ \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} ۱۵x+۹y=۸۴ \\ ۲۵y-۱۵x=۱۲۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۳۴y=۲۰۴ \;\Rightarrow\; y=۶$$

با جایگذاری $y=۶$ در یکی از دو معادله، $x=۲$ حاصل شده و $D(۲,۶)$ خواهد بود.

---✧---

توجه کنید:

می‌توان نشان داد، اگر دو خط به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ داده شوند، آنگاه آن‌ها:

- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خط‌ها متقاطع‌اند.
- بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.
- بر هم عمودند، هرگاه: $aa'+bb'=0$.

فاصله‌ی دو نقطه:

اگر نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داده شوند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(دلیل این مطلب، با رسم شکل و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

بویژه:

- اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_1=x_2$، آنگاه:

$$AB=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$$

- اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_1=y_2$، آنگاه:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$$

- فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ ساده‌تر قابل بیان است:

$$OA=\sqrt{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

برای نمونه؛

اگر نقاط $A(2,-1)$ و $B(3,2)$ داده شوند:

الف) طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(2-(-1))^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ:

$$OA=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(1,2)$، $B(2,-1)$ و $C(-1,-1)$ داده شده است.

الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟

ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

پاسخ

الف) با محاسبه، می‌بینید سه ضلع‌ها نابرابرند:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$BC=\sqrt{(-1-2)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{9+0}=3$$

ب) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، ضلع بزرگ‌تر وتر است و رابطه‌ی فیثاغورس برقرار خواهد بود:

$$(\sqrt{13})^2=13 \quad \text{و} \quad (\sqrt{10})^2+(3)^2=10+9=19$$

چون $19 \neq 13$، در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه نیست.

مثال: (از کتاب) مثلث ABC با رأس‌های $A(2,0)$، $B(5,4)$ و $C(-2,3)$ داده شده است. به دو روش نشان دهید مثلث قائم الزاویه است و سپس مساحت آن را بیابید.

پاسخ

محاسبه‌ی طول اضلاع مانند قبل:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$
$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$
$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

روش اول: چون رابطه‌ی فیثاغورس برقرار است:

$$BC^2 = 50 \ , \ AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50$$

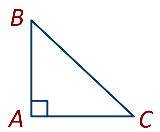
روش دوم: توسط شیب‌ها نشان می‌دهیم ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند:

$$m_{AB} = \frac{4-0}{5-2} = \frac{4}{3} \ , \ m_{AC} = \frac{3-0}{-2-2} = -\frac{3}{4}$$

(شیب‌ها قرینه و معکوس هستند.)

برای تعیین مساحت، AB و AC را به عنوان ارتفاع و قاعده به کار می‌بریم:

$$S = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

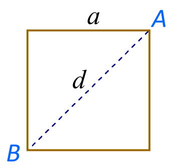


مثال: اگر $A(4,4)$ و $B(1,1)$ دو رأس متقابل (روبه‌روی) یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$



توجه کنید:

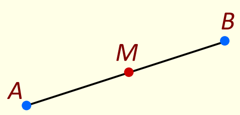
بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d = a\sqrt{2}$ وجود دارد و در نتیجه:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = a^2 = \frac{18}{2} = 9$$

وسط پاره‌خط:

اگر نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:

$$(x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}) \Rightarrow M(x_M, y_M)$$



(دلیل این مطلب را می‌توان با نمایش مختصات هر سه نقطه روی محورهای مختصات بیان کرد.)

مثال: نقاط $A(۳m-۱,۲m-۵)$ و $B(۳-m,۱-۴m)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی محور xها واقع باشد، مقدار m را بیابید.

پاسخ

باید عرض نقطه‌ی M برابر صفر باشد تا روی محور x قرار گیرد. بنابراین:

$$y_M=۰ \rightarrow \frac{۲m-۵+۱-۴m}{۲}=۰ \rightarrow \frac{-۲m-۴}{۲}=۰$$
$$\rightarrow -۲m-۴=۰ \Rightarrow m=-۲$$

مثال: در مثلث با رئوس $A(۰,۳)$ ، $B(-۳,۱)$ و $C(۳,۱)$، فاصله‌ی نقطه‌ی A از وسط ضلع BC (یعنی طول میانه‌ی AM) را حساب کنید.

پاسخ

مختصات وسط ضلع BC چنین است:

$$M:\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{۲}=\dfrac{-۳+۳}{۲}=۰ \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{۲}=\dfrac{۱+۱}{۲}=۱ \end{cases} \Rightarrow M(۰,۱)$$

اکنون طول میانه حساب می‌شود:

$$AM=\sqrt{(۰-۰)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

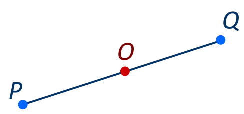
در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

پاسخ

اگر قرینه را $Q(r,s)$ بگیرید، باید $O(۰,۰)$ نقطه‌ی وسط P و Q باشد:

$$۰=\frac{\alpha+r}{۲} \rightarrow \alpha+r=۰ \Rightarrow r=-\alpha$$
$$۰=\frac{\beta+s}{۲} \rightarrow \beta+s=۰ \Rightarrow s=-\beta$$



نتیجه:

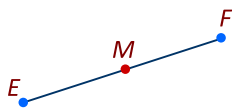
قرینه‌ی نقطه‌ی $P(a,b)$ نسبت به مبدأ به صورت $P'(-a,-b)$ تعیین می‌شود.

مطلب بالا را می‌توان با کلیت بیشتری بررسی کرد:

مثال: (از کتاب) مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $E(۱,۲)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-۱,۴)$ مشخص کنید.

پاسخ

اگر $F(a,b)$ قرینه‌ی E باشد، باید M نقطه‌ی وسط E و F باشد:



$$x_M=\frac{x_E+x_F}{۲}\to -۱=\frac{۱+a}{۲}\Rightarrow a=-۳ \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_E+y_F}{۲}\to ۴=\frac{۲+b}{۲}\Rightarrow b=۶$$

در نتیجه $F(-۳,۶)$ است.

توجه کنید:

مانند آن‌چه در مثال بالا دیدیم، می‌توان در کل نشان داد:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(a,b)$ نسبت به نقطه‌ی دلخواه $M(\alpha,\beta)$ برابر $P'(۲\alpha-a,۲\beta-b)$ است.

مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را نشان دهید:

$$x_A+x_C=x_B+x_D \quad \text{و} \quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

در نتیجه:

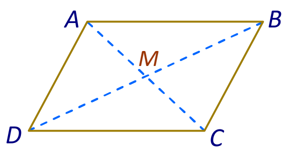
اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می‌توان مشخص کرد.

پاسخ

از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

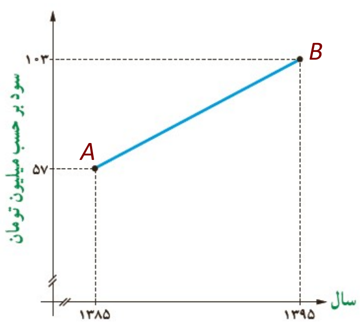
پس نقطه‌ی M وسط هر دو قطر AC و BD بوده و بنابراین:



$$\left.\begin{aligned}x_M&=\frac{x_A+x_C}{۲}\\ x_M&=\frac{x_B+x_D}{۲}\end{aligned}\right\}\to \frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\xrightarrow{\times ۲} x_A+x_C=x_B+x_D$$

به روش مشابه، عرض نقاط هم خاصیت گفته شده را دارد.

مثال: (از کتاب) سود سالانه‌ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار روبه‌رو سیر صعودی داشته است.



الف) میانگین سود سالانه‌ی کارگاه در این دهه چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه‌ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه چقدر باشد؟

پاسخ

الف) واضح است که میانگین: $\frac{۵۷+۱۰۳}{۲}=\frac{۱۶۰}{۲}=۸۰$ میلیون تومان است.

ب) چون سیر صعودی سود کارگاه خطی است، میانگین سود در نقطه‌ی وسط اتفاق می‌افتد:

$$\frac{۱۳۸۵+۱۳۹۵}{۲}=۱۳۹۰ \qquad (\text{سال } ۱۳۹۰)$$

پ) اگر روند همین گونه باشد، جواب مورد نظر، قرینه‌ی A نسبت به B است. اگر سود سالانه در آن سال را m بگیریم:

$$\frac{۵۷+m}{۲}=۱۰۳ \Rightarrow m=۲\times۱۰۳-۵۷=۱۴۹ \qquad (\text{میلیون تومان})$$

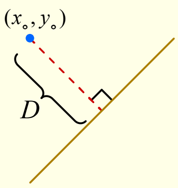
منظور از فاصله‌ی نقطه تا یک خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی بین آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است. این فاصله برابر طول پاره-خط عمود رسم شده از نقطه بر خط بوده و چنین محاسبه می‌شود:

فاصله‌ی نقطه تا خط:

باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax+by+c=0$ نوشت. سپس:

فاصله‌ی یک نقطه‌ی (x_0,y_0) از این خط برابر است با:

$$D=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



بویژه:

فاصله‌ی مبدأ مختصات: $(0,0)$ تا این خط برابر است با:

$$\boxed{\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

مثال: دو خط $l_1:\ ۲x+y=-۱$ و $l_2:\ -x+۲y=-۷$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(۷,۹)$ از خط l_2 را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{array}{r} ۲x+y=-۱ \\ -x+۲y=-۷ \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} ۲x+y=-۱ \\ -۲x+۴y=-۱۴ \end{array}\right\} \to ۵y=-۱۵ \Rightarrow y=-۳$$

جایگذاری -۳ در یکی از معادلات به جای y:

$$۲x-۳=-۱ \Rightarrow x=۱$$

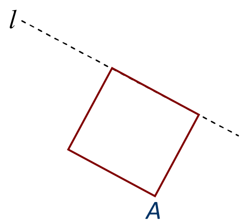
ب) خط l_2 را استاندارد کرده و فرمول بالا را در مورد نقطه‌ی $C(۷,۹)$ به‌کار می‌بریم:

$$-x+2y+7=0 \Rightarrow \frac{|-(7)+2(9)+7|}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2}}=\frac{|18|}{\sqrt{5}}=\frac{18}{\sqrt{5}}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

نقطه‌ی $A(3,0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $l: y-x=5$ می‌باشد. مساحت این مربع را به‌دست آورید.

پاسخ



مختصات A در معادله‌ی خط صدق نمی‌کند؛ پس بیرون خط است. رسم شکل تقریبی:

فاصله‌ی نقطه تا خط:

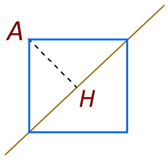
$$x-y+5=0 \Rightarrow \frac{|3-0+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{8}{\sqrt{2}}$ بوده و در نتیجه:

$$S=(\frac{8}{\sqrt{2}})^2=\frac{64}{2}=32$$

مثال: نقطه‌ی $A(2,3)$ رأس مربعی است که خط $2x+y-2=0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ



با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از قطر مربع، نصف طول قطر را به‌دست می‌دهد:

$$AH=\frac{|2(2)+3-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

پس قطر مربع $d=2\sqrt{5}$ است. با استفاده از رابطه‌ی $d=a\sqrt{2}$ بین ضلع و قطر، طول ضلع مربع $a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ بوده و بنابراین

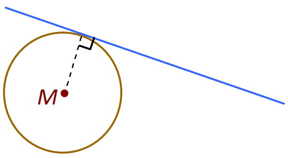
مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^2=\left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{4\times5}{2}=10$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

دایره‌ی به مرکز $M(3,-1)$ بر خط به معادله‌ی $y=\frac{4}{3}x$ مماس است. مساحت دایره را حساب کنید.

پاسخ



می‌دانیم:

خط مماس بر دایره، بر شعاع متصل به نقطه‌ی تماس عمود است:

بنابراین:

شعاع برابر فاصله‌ی مرکز تا خط مماس می‌باشد:

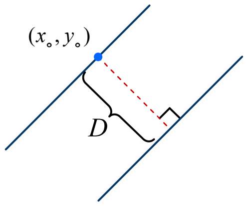
$$y=\frac{۴}{۳}x \xrightarrow{\times ۳} ۴x-۳y=۰ \Rightarrow r=\frac{|۴(۳)-۳(-۱)|}{\sqrt{(۴)^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

در نتیجه مساحت دایره برابر $\pi\times ۳^۲=۹\pi$ است.

---✧---

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $l_۱:\ ۲x+y=-۱$ و $l_۲:\ ۲y=-۴x+۳$ را بیابید.

پاسخ



چنان که از شکل می‌توان فهمید، کافی است:

یک نقطه دلخواه روی یکی از خط‌ها انتخاب کرده و فاصله‌اش را تا خط دیگر حساب کرد.

نقطه‌ی $(۰,-۱)$ روی خط $l_۱$ است، فاصله‌ی آن تا خط $l_۲:\ ۴x+۲y-۳=۰$ را حساب می‌کنیم که در واقع همان فاصله‌ی بین این دو خط موازی است:

$$D=\frac{|۴(۰)+۲(-۱)-۳|}{\sqrt{(۴)^۲+(۲)^۲}}=\frac{|-۵|}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}$$

---✧---

توجه کنید:

همیشه می‌توان با ضرب عددهای مناسب در معادلات دو خط موازی، آن‌ها را با ضرایب مشابه به شکل $l_۱:\ ax+by+c=۰$ و $l_۲:\ ax+by+c'=۰$ نوشت. در این صورت، فاصله‌ی آن‌ها مستقیماً چنین محاسبه می‌شود:

$$\boxed{D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

برای نمونه:

در مثال قبل، معادله‌ی اول را در عدد ۲ ضرب کنید؛ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} l_۱:&\ ۴x+۲y+۲=۰\\ l_۲:&\ ۴x+۲y-۳=۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow D=\frac{|۲-(-۳)|}{\sqrt{۴^۲+۲^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۲۰}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۵}}$$

مثال: معادلات دو ضلع یک مربع به صورت $۲x+۳y=-۴$ و $۴x+۶y+m=۰$ است. اگر مساحت مربع $\frac{۹}{۱۳}$ باشد، مقدار m را حساب کنید.

پاسخ

چون دو ضلع داده شده موازی هستند، فاصله‌ی آن‌ها برابر ضلع مربع است. به روش کوتاه بالا:

$$\left.\begin{aligned} ۴x+۶y+۸=۰\\ ۴x+۶y+m=۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow a=\frac{|m-۸|}{\sqrt{۴^۲+۶^۲}}=\frac{|m-۸|}{\sqrt{۵۲}}$$

پس مساحت برابر $S=a^۲=\frac{(m-۸)^۲}{۵۲}$ بوده است. طبق فرض:

$$\frac{(m-۸)^۲}{۵۲}=\frac{۹}{۱۳}\rightarrow (m-۸)^۲=\frac{۹\times ۵۲}{۱۳}=۹\times ۴=۳۶$$

$$\rightarrow m-۸=\pm ۶\rightarrow \begin{cases} m-۸=۶\Rightarrow m=۱۴\\ m-۸=-۶\Rightarrow m=۲\end{cases}$$

پاسخ دهید (۱)

۱- وضعیت خط‌های $x-۲y=۰$ و $y+۲x=-۱$ را نسبت به هم بررسی کرده و آن‌ها را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۲- نقطه‌ی $P(۴-۳m,۲m-۶)$ روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد. فاصله‌ی P از مبدأ را بیابید.

۳- معادله خطی که از مبدأ مختصات و محل برخورد دو خط به معادله‌های $۲x+۳y+۸=۰$ و $۲x-۷y+۱۲=۰$ می‌گذرد، را بنویسید.

۴- اگر $A(۴,۴)$ و $B(۱,۱)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را بیابید.

۵- فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $۲y=mx+b$ گذرنده بر نقطه‌ی $(۱,۲)$ برابر ۱ است. m را بیابید.

۶- سه خط $\begin{cases} x+y=۷ \\ ۲x-۴y+۱۰=۰ \\ (k+۱)x-ky=۰ \end{cases}$ در یک نقطه متقارب‌اند (یعنی هر سه در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند!) . k را بیابید.

راهنمایی: نقطه‌ی تقاطع دو خط اول را تعیین کنید؛ خط سوم نیز باید از این نقطه عبور کند!

۷- مثلث با رأس‌های $A(-۱,۲)$، $B(۳,۰)$ و $C(۱,-۲)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ارتفاع AH را بنویسید.

ب) طول این ارتفاع را به دو روش حساب کنید.

پ) معادله‌ی میانه‌ی AM را نوشته و طول آن را حساب کنید.

۸- هرگاه $A(۲,-۲)$ و $C(۳,۲)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، معادله‌ی قطر BD را بنویسید.

۹- فاصله‌ی دو خط موازی به معادله‌های $y=x+۱$ و $y=x+۲$ را حساب کنید.

۱۰- به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟

☐ -۲ ☐ -۱ ☐ ۳ ☐ هیچ مقدار m

منتخب کتاب:

۱- نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱,۲)$، $B(۲,۵)$ و $C(۴,۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

۲- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲,-۲)$ و $B(۶,۴)$ هستند.

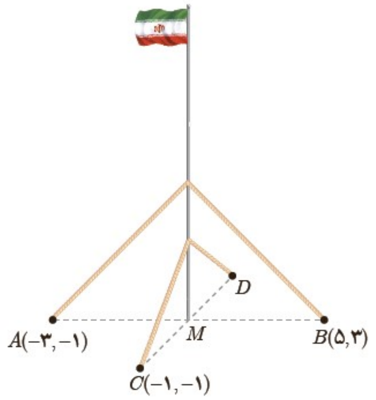
الف) اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی $C(۷,۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟

۳- یکی از اضلاع مربعی بر خط $L:\ y=2x-1$ واقع است. اگر $A(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به‌دست آورید.

۴- نقاط $A(2,3)$، $B(-1,0)$ و $C(1,-2)$ سه رأس مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم را بیابید.

۵- طبق شکل، یک میله پرچم توسط کابل‌هایی در چهار نقطه به زمین متصل شده است؛ به طوری که، فاصله‌ی هر کدام از این نقاط تا پای میله، برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی مقابل به آن تا پای میله. مختصات نقطه‌ی D را بیابید.



چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

یک ضلع مستطیلی روی خط $x=y-1$ واقع بوده و نقاط $(-3,2)$ و $(3,4)$ دو سر قطری از آن هستند. مساحت مستطیل را حساب کنید.

۲ معادله درجه دوم

در این بخش، تکمیل مبحث حل معادله‌ی درجه دوم و سپس ارتباط بین جواب‌های این نوع معادلات بررسی می‌شود. ابتدا روش‌های حل را یادآوری می‌کنیم.

توجه کنید:

سریع‌ترین روش حل معادله، در صورت امکان، روش تجزیه کردن و استفاده از قاعده‌ی زیر است:

$$\boxed{P\times Q=0 \Rightarrow P=0 \quad \text{یا} \quad Q=0}$$

مثال: معادلات زیر را به ساده‌ترین روش حل کنید.

الف) $x^2-4x+4=1$

ب) $x^2-3x=0$

پ) $x^2-x=6$

ت) $3x^2+4x+1=0$

پاسخ

الف) طبق قاعده‌ی « $x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ » می‌نویسیم:

$$(2x+1)^2=9 \rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

ب) با فاکتورگیری، تجزیه انجام می‌شود:

$$x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پ) جملات را به سمت چپ برده و تجزیه را طبق اتحاد جمله مشترک انجام می‌دهیم:

$$x^2-x-6=0 \rightarrow (x+2)(x-3)=0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

ت) چون x^2 دارای ضریب است، باید ضریب را به مجذور تبدیل کرده و سپس طبق اتحاد جمله مشترک عمل کنیم:

$$3x^2+4x+1=0 \xrightarrow{\times 3} 9x^2+12x+3=0 \rightarrow (3x)^2+\underbrace{4}_{a+b}(3x)+\underbrace{3}_{ab}=0$$

$$\rightarrow (3x+3)(3x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} 3x+3=0 \rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1 \\ 3x+1=0 \rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

روش دلتا:

شکل کلی معادله‌ی درجه دوم به صورت $ax^2+bx+c=0\ ,\ a\neq 0$ بوده و در آن اعداد a، b و c را **ضرایب معادله** می‌گوئیم. در این معادله، جواب‌ها بر حسب عدد $\Delta=b^2-4ac$ تعیین می‌شوند:

- اگر $\Delta > ۰$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) α و β دارد که عبارتند از:

$$\boxed{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}} \quad و \quad \boxed{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}}$$

- اگر $\Delta = ۰$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مضاعف** (برابر یا تکراری) دارد که عبارتند از:

$$\boxed{\alpha=\beta=-\frac{b}{۲a}}$$

- اگر $\Delta < ۰$ باشد، معادله **جواب ندارد.**

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $۴x^۲-x-۱=۰$

ب) $۳x^۲-x=-۶$

پاسخ

الف) در این معادله $a=۴$، $b=-۱$ و $c=-۱$ بوده و در نتیجه مقدار دلتا به‌دست می‌آید:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۴)(-۱)=۱۷$$

چون دلتا مثبت است، برای معادله دو جواب متمایز حاصل می‌شود:

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)-\sqrt{۱۷}}{۲(۴)}=\frac{۱-\sqrt{۱۷}}{۸} \quad و \quad \alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{-(-۱)+\sqrt{۱۷}}{۲(۴)}=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۸}$$

ب) این معادله را نیز به صورت $۳x^۲-x+۶=۰$ مرتب کرده و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^۲-۴ac=(-۱)^۲-۴(۳)(۶)=۱-۷۲=-۷۱$$

چون Δ است، معادله هیچ جوابی ندارد.

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $(۲-t)x^۲-x=۳$:

الف) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

ب) جواب حقیقی نداشته باشد.

پاسخ

معادله را به صورت استاندارد $(۲-t)x^۲-x-۳=۰$ می‌نویسیم تا $a=۲-t$، $b=-۱$ و $c=-۳$ مشخص شوند. اکنون:

الف) تعیین مقدار دلتا:

$$\Delta=(-۱)^۲-۴(۲-t)(-۳)=۱+۱۲(۲-t)=۲۵-۱۲t$$

شرط ریشه‌های مضاعف این است که دلتا صفر شود:

$$۲۵-۱۲t=۰ \rightarrow ۱۲t=۲۵ \Rightarrow t=\frac{۲۵}{۱۲}$$

ب) در این حالت لازم است دلتا منفی باشد:

$$۲۵-۱۲t<۰ \rightarrow -۱۲t<-۲۵ \Rightarrow t>\frac{-۲۵}{-۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

حالت‌های خاص: (مهم)

معادله‌ی $ax^2+bx+c=0 \, , \, a\neq 0$ را در نظر بگیرید:

❖ اگر a و c مختلف العلامت باشند، معادله همیشه دو جواب متمایز دارد.

زیرا:

$$\Delta = \underbrace{b^2}_{\geq 0} - \underbrace{4ac}_{>0} \Rightarrow \Delta > 0$$ **(مقدار دلتا الزاماً مثبت می‌شود)**

❖ در دو حالت مهم زیر، جواب‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ در لحظه تعیین می‌شوند:

- اگر جمع ضرایب برابر صفر شود: $a+b+c=0$، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.
- اگر $a-b+c=0$ (یا: $b=a+c$) باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای نمونه؛

در معادله‌ی $3x^2+4x+1=0$ که بالاتر به روش تجزیه حل شد، شرط $b=a+c$ برقرار است: چون $1+3=4$. پس جواب‌ها فوری -1 و $-\frac{c}{a}=-\frac{1}{3}$ به‌دست خواهند آمد.

مثال: طول و عرض مستطیلی به ترتیب $7x+1$ و $x+3$ است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ واحد مربع باشد، مقدار x را بیابید.

پاسخ

مساحت مستطیل را برابر ۳۲ قرار می‌دهیم:

$$(x+3)(7x+1)=32 \rightarrow 7x^2+x+21x+3=32 \Rightarrow 7x^2+22x-29=0$$

می‌بینید که جمع ضرایب صفر است و در نتیجه جواب‌ها به روش سریع معلوم می‌شوند:

$$x_1=1 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{c}{a}=-\frac{29}{7}$$

چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد، فقط $x=1$ قابل قبول است.

تبدیل به درجه دوم: (تغییر متغیر)

گاهی یک معادله درجه دوم نیست، ولی ظاهر یا کلیت آن شبیه معادلات درجه دوم است. چنین معادله‌ای معمولاً با تغییر کوچکی تبدیل به معادله درجه دوم شده و سپس حل می‌شود. نمونه‌ها:

الف) برای حل معادله‌ی درجه چهارم $x^4-3x^2-4=0$، قرار می‌دهیم: $x^2=t$ و در نتیجه یک معادله درجه دوم به صورت $t^2-3t-4=0$ خواهیم داشت. حل معادله‌ی جدید به روش کوتاه:

$$t=-1, \, t=-\frac{c}{a}=-\frac{-4}{1}=4$$

اکنون طبق تغییر متغیری که انجام داده‌ایم، دو جواب برای معادله‌ی اصلی حاصل می‌شود:

- $t=4: \quad x^2=4 \Rightarrow x=2,-2$
- $t=-1: \quad x^2=-1$ غیر ممکن

ب) سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳: معادله‌ی $x^۴ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ دارای دو جواب حقیقی است. (درست ☐ - نادرست ☐)

جواب: نادرست است؛ زیرا:

با تغییر $x^۲ = t$، دو جواب مثبت $t = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$ حاصل و در نتیجه برای x چهار جواب به‌دست خواهد آمد.

به نمونه‌های دیگری توجه کنید:

مثال: در معادله‌ی $(۲x-۱)^۲ + ۲(۲x-۱) - ۳ = ۰$ ریشه‌ها را مشخص کنید.

پاسخ

موقتاً قرار می‌دهیم: $۲x - ۱ = t$. با جایگزینی در معادله، باید جواب‌های $t^۲ + ۲t - ۳ = ۰$ را مشخص کنیم. طبق روش تجزیه کردن می‌نویسیم:

$$(t+۳)(t-۱) = ۰ \Rightarrow t = -۳ \ , \ t = ۱$$

اکنون با جایگزینی در رابطه‌ی $۲x - ۱ = t$، جواب‌های x به‌دست خواهند آمد:

- $t = ۱ : \ ۲x - ۱ = ۱ \rightarrow ۲x = ۲ \Rightarrow x = ۱$
- $t = -۳ : \ ۲x - ۱ = -۳ \rightarrow ۲x = -۲ \Rightarrow x = -۱$

---✧---

مثال: معادله‌ی $(x^۲ - ۱)^۲ + x^۲ - ۱ = ۶$ را با روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $x^۲ - ۱ = t$ و در نتیجه معادله به صورت $t^۲ + t - ۶ = ۰$ تبدیل می‌شود. طبق روش تجزیه کردن می‌نویسیم:

$$(t+۳)(t-۲) = ۰ \Rightarrow t = -۳ \ , \ t = ۲$$

توسط تغییر متغیر به‌کار رفته:

- $t = ۲ : \ x^۲ - ۱ = ۲ \rightarrow x^۲ = ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۳} \ , \ x = -\sqrt{۳}$
- $t = -۳ : \ x^۲ - ۱ = -۳ \rightarrow x^۲ = -۲$ **غیر ممکن و جواب ندارد!**

پس معادله فقط دو جواب $\pm\sqrt{۳}$ دارد.

---✧---

در ادامه، ارتباط بین جواب‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم را ببینید:

روابط بین ریشه‌ها:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، آنگاه:

- **مجموع ریشه‌ها:** برابر است با: $s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$
- **حاصل‌ضرب ریشه‌ها:** برابر است با: $p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

(گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که می‌توانید رابطه‌ی $|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را به‌کار ببرید.)

توجه کنید:

روابط بالا با توجه به مقادیر $\alpha,\beta=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ نوشته شده‌اند. برای نمونه:

$$p=\alpha\beta=\underbrace{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}_{\frac{\sqrt{\Delta}-b}{2a}\times(-\frac{\sqrt{\Delta}+b}{2a})}=-\frac{(\sqrt{\Delta})^2-b^2}{4a^2}=-\frac{b^2-4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}==\frac{c}{a}$$

تذکر مهم:

هر وقت در مورد ریشه‌های α و β از یک معادله‌ی درجه دوم صحبت می‌شود؛

باید از برقراری شرط $\Delta\geq 0$ مطمئن باشید؛ در صورت لزوم، باید آن را چک کنید.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2-6x-1=0$ باشند؛

الف) مقادیر $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ را حساب کنید.

ب) حاصل $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) واضح است که:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-6}{2}=3 \quad \text{و} \quad p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-1}{2}$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}=\frac{3}{-\frac{1}{2}}=-6$$

مثال: در معادله‌ی $2x^2-mx+m-1=0$، مقدار m را در صورت امکان طوری حساب کنید که:

الف) ریشه‌های معادله قرینه‌ی هم باشند.

ب) ریشه‌های معادله عکس هم باشد.

پاسخ

الف) باید $\alpha+\beta=0$ و یا $m=0 \Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2}=0$ باشد. چون Δ منفی نمی‌شود، $m=0$ قابل قبول است.

ب) باید $\alpha\beta=1$ و یا $m=3 \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{m-1}{2}=1$ باشد. برای $m=3$، داریم:

$$2x^2-3x+2=0 \rightarrow \Delta=9-16<0$$

پس خواسته‌ی این قسمت غیرممکن است.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $-3x^2+x+2=0$ باشند، حاصل $3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$ را به‌دست آورید.

پاسخ

مشابه قبل:

$$s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \Rightarrow s=-\frac{۱}{-۳}=\frac{۱}{۳} \quad و \quad p=\alpha\beta=\frac{c}{a} \Rightarrow p=\frac{۲}{-۳}=-\frac{۲}{۳}$$

باید عبارت $۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲$ را بر حسب $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ نوشته و سپس مقادیر آن‌ها را جایگزین سازیم:

$$۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲=۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۳ps \Rightarrow ۳(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

مثال: به ازای چه مقداری از m در معادله‌ی $x^۲-mx+۸=۰$، یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

پاسخ

شرط داده شده را به صورت $\beta=\alpha^۲$ در نظر گرفته و فرمول ضرب ریشه‌ها را به کار می‌بریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \to \alpha\alpha^۲=۸ \to \alpha^۳=۸ \to \alpha=۲$$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله عدد ۲ است و می‌توانیم آن را در معادله جایگزین x سازیم:

$$۲^۲-m\times۲+۸=۰ \to ۲m=۱۲ \Rightarrow m=۶$$

عبارت‌های خاص:

با داشتن عددهای: $\alpha+\beta=s$ و $\alpha\beta=p$، محاسبه‌ی برخی عبارت‌های خاص بر حسب s و p:

- **جمع مجذورات:**

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=s^۲-۲p$$

- **جمع معکوس‌ها:**

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}$$

- **جمع معکوس مجذورات:**

$$\frac{۱}{\alpha^۲}+\frac{۱}{\beta^۲}=\frac{\beta^۲+\alpha^۲}{\alpha^۲\beta^۲}=\frac{s^۲-۲p}{p^۲}$$

- **جمع مکعبات:**

$$\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha^۲\beta-۳\alpha\beta^۲=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=s^۳-۳ps$$

مثال: مقدار m را طوری حساب کنید که مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله‌ی $۲x^۲-mx+m-۱=۰$ برابر ۴ باشد.

پاسخ

باید: $\alpha^۲+\beta^۲=s^۲-۲p=۴$ باشد. چون $s=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{۲}=\frac{m}{۲}$ و $p=\frac{c}{a}=\frac{m-۱}{۲}$؛

$$(\frac{m}{۲})^۲ - ۲(\frac{m-۱}{۲}) = ۴ \rightarrow \frac{m^۲}{۴} - m + ۱ = ۴$$

$$\xrightarrow{\times ۴} m^۲ - ۴m - ۱۲ = ۰ \Rightarrow m = -۲ \ , \ m = ۶$$

توجه کنید:

معادله‌ی داده شده برای $m = ۶$ دارای دلتای منفی است و در نتیجه فقط $m = -۲$ قابل قبول خواهد بود.

گاهی لازم است با داشتن ریشه‌ها یا حتی فقط با داشتن جمع و ضرب آن‌ها، معادله‌ی مربوطه را نوشت:

نوشتن معادله:

هر گاه **مجموع** ریشه‌ها s و **حاصل‌ضرب** ریشه‌ها p معلوم باشند، آن معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^۲ - sx + p = ۰$$

دلیل:

اگر x' و x'' را ریشه‌های معادله بگیریم، باید عامل‌های $x - x'$ و $x - x''$ در معادله موجود باشند. در نتیجه:

$$(x - x')(x - x'') = ۰ \rightarrow x^۲ - x'x - xx'' + x'x'' = ۰ \Rightarrow x^۲ - \underbrace{(x' + x'')}_{s}x + \underbrace{x'x''}_{p} = ۰$$

برای نمونه،

اگر جواب‌های معادله‌ای $۲ - \sqrt{۳}$ و $۲ + \sqrt{۳}$ باشند، چون:

$$s = ۲ - \sqrt{۳} + ۲ + \sqrt{۳} = ۴ \quad و \quad p = (۲ - \sqrt{۳})(۲ + \sqrt{۳}) = ۴ - ۳ = ۱$$

این معادله به صورت $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ خواهد بود.

مثال: معادله‌ای که ریشه‌های آن عددهای $\frac{۱}{۲}$ و -۳ باشند را به دو روش بنویسید:

الف) به روش مستقیم.

ب) به روش فرمولی بالا.

پاسخ

الف) باید معادله به صورت زیر باشد:

$$(x - \frac{۱}{۲})(x - (-۳)) = ۰ \rightarrow (x - \frac{۱}{۲})(x + ۳) = ۰ \rightarrow x^۲ + ۳x - \frac{۱}{۲}x - \frac{۳}{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ + \frac{۵}{۲}x - \frac{۳}{۲} = ۰$$

ب) با توجه به مقادیر $s = \frac{۱}{۲} + (-۳) = -\frac{۵}{۲}$ و $p = (\frac{۱}{۲})(-۳) = -\frac{۳}{۲}$ طبق فرمول:

$$x^۲ - sx + p = ۰ \Rightarrow x^۲ + \frac{۵}{۲}x - \frac{۳}{۲} = ۰$$

گاهی لازم می‌شود:

اگر x' و x'' ریشه‌ها بوده و a (ضریب x^2 در معادله) هم معلوم باشد، معادله باید به صورت زیر نوشته شود:

$$a(x-x')(x-x'')=0$$

مثال: (از کتاب) آیا مستطیلی با محیط $11\,cm$ و مساحت $6\,cm^2$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را مشخص کنید.

پاسخ

اگر طول و عرض را α و β بنامیم، باید:

$$2(\alpha+\beta)=11 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{11}{2} \quad \text{و} \quad \alpha\beta=6$$

پس طول و عرض باید جواب‌های معادله‌ی $x^2-\frac{11}{2}x+6=0$ یا $2x^2-11x+12=0$ باشند.

$$\Delta=121-96=25 \to \begin{cases} \alpha=\dfrac{11+\sqrt{25}}{4}=\dfrac{16}{4}=4 \\ \beta=\dfrac{11-\sqrt{25}}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

(می‌بینید که مستطیل وجود دارد.)

---✧---

مثال: معادله‌ای با دو شرط زیر بنویسید:

الف) یکی از جواب‌های آن $1-2\sqrt{3}$ باشد.

ب) ضرایب آن عددهای گویا باشند.

پاسخ

چون یکی از جواب‌ها $1-2\sqrt{3}$ است، برای این‌که s و p عددهای گویا (غیر رادیکالی) به‌دست آیند، لازم است جواب دیگر مزدوج جواب اول باشد، یعنی: $1+2\sqrt{3}$. بنابراین:

$$s=1-2\sqrt{3}+1+2\sqrt{3}=2 \quad \text{و} \quad p=(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})=1^2-(2\sqrt{3})^2=1-12=-11$$

و معادله به صورت $x^2-2x-11=0$ نوشته می‌شود.

---✧---

در ادامه، با داشتن یک معادله، معادله‌ای مرتبط با آن می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $4x^2-x-1=0$ دو واحد کوچک‌تر باشد.

پاسخ

در این معادله، $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{4}$ است و باید ریشه‌های معادله‌ی مورد نظر $\alpha-2$ و $\beta-2$ باشند. مجموع و ضرب ریشه‌ها:

$$s=\alpha-2+\beta-2=\alpha+\beta-4=\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$$

$$p=(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4=-\frac{1}{4}-2(\frac{1}{4})+4=\frac{13}{4}$$

پس معادله چنین نوشته خواهد شد:

$$x^2-(-\frac{15}{4})x+\frac{13}{4}=0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2+15x+13=0$$

روش کوتاه:

در سؤالاتی مانند مثال قبل، برای پاسخ دهی سریع‌تر، طبق مراحل زیر عمل کنید:

- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y بگیرید.
- با توجه به شرط داده شده بین ریشه‌ها، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.
- از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y به‌دست آورده و در معادله‌ی اولیه جایگزین کنید.
- معادله‌ی به‌دست آمده را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

نمونه؛ پاسخ مثال قبل به این روش:

باید $y=x-2$ باشد؛ پس $x=y+2$ بوده و در نتیجه:

$$4(y+2)^2-(y+2)-1=0 \rightarrow 4y^2+16y+16-y-2-1=0 \Rightarrow 4y^2+15y+13=0$$

که همان معادله‌ی $4x^2+15x+13=0$ است.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-3x-1=0$ یک واحد کمتر باشند.

پاسخ

طبق شرط داده شده می‌نویسیم: $y=\frac{1}{x}-1$ و بنابراین $x=\frac{1}{y+1} \rightarrow \frac{1}{x}=y+1$. عبارت $\frac{1}{y+1}$ را در معادله جایگزین x می‌کنیم:

$$2\times\frac{1}{(y+1)^2}-3\times\frac{1}{y+1}-1=0 \xrightarrow{\times(y+1)^2} 2-3(y+1)-(y+1)^2=0$$

$$\rightarrow 2-3y-3-y^2-2y-1=0 \rightarrow -y^2-5y-2=0$$

$$\Rightarrow y^2+5y+2=0$$

چند حالت ساده:

اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند؛

الف) معادله‌ای که جواب‌های آن $-\alpha$ و $-\beta$ باشند، به صورت $ax^2-bx+c=0$ است.

ب) معادله‌ای که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشند، به صورت $cx^2+bx+a=0$ است.

سؤال: معادله‌ای که جواب‌های آن $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ باشند، چگونه است؟

پاسخ دهید (۲)

۱- ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ را مشخص کنید.

۲- ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$ را بیابید.

۳- در معادله‌ی درجه دوم $x^2-4x+1=0$، حاصل عبارت $(x_2^2-4x_2+4)(x_1^2-4x_1+2)$ را حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

۴- اگر $k^2-3k+7=0$ و $k'^2-3k'+7=0$ باشد، $k+k'$ چقدر است؟

۵- در معادله‌ی $2x^2-mx+5m=0$، مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های معادله عکس و قرینه‌ی هم باشند؟

۶- برای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{9}{5}$　　۲) ۱　　۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$　　۴) -1 و $\frac{9}{5}$

۷- در معادله‌ی $x^2-mx=2$ رابطه‌ی $x_1(1+x_2)=2$ بین ریشه‌ها وجود دارد. m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$　　۲) $-\frac{5}{2}$　　۳) $\frac{5}{2}$　　۴) $-\frac{7}{2}$

۸- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ باشند. (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

۹- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2-\sqrt{4-a}$ و $2+\sqrt{4-a}$ باشند.

۱۰- ریشه‌های معادله‌ی $x^2+ax+b=0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟

☐ -2　　☐ -1　　☐ $\frac{2}{3}$　　☐ $\frac{4}{3}$

منتخب کتاب:

۱- معادله‌ی $4x^6+1=5x^3$ را حل کنید.

چالش (ویژه علاقمندان) CHALLENGE

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2-3x+1-m=0$ بوده و $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{3-\beta}=10$ باشد، مقدار m را بیابید.

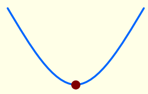
۳ نمودار تابع درجه دو

کلیت نمودار تابع درجه دوم را یادآوری می‌کنیم.

نمودار درجه دوم:

نمودار تابع $y = ax^{2} + bx + c$ همیشه یک **«سهمی»** به یکی از دو صورت زیر است:
نمودار برای $a > 0$ دارای می‌نیمم (کمترین y نمودار) و برای $a < 0$ دارای ماکزیمم (بیشترین y نمودار) است. به نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم **«رأس»** سهمی گفته می‌شود.

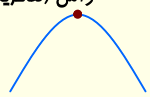
اگر $a > 0$ باشد:



رأس (می‌نیمم)

اگر $a < 0$ باشد:

رأس (ماکزیمم)



بنابراین:

بیشترین یا کمترین مقدار عبارت درجه دوم همان عرض رأس سهمی است.

نمودار سهمی همیشه دارای محور تقارن است:

رأس و محور تقارن:

طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن با جایگذاری طول در ضابطه مشخص می‌شود.

نتیجه:

خط عمودی به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی را مشخص می‌کند.

ضمناً، به آسانی می‌توان نشان داد:

عرض رأس سهمی یک‌باره از رابطه‌ی $-\frac{\Delta}{4a}$ نیز قابل محاسبه است.

برای نمونه؛

در تابع $y = -x^{2} + 4x - 3$، طول رأس (و همچنین معادله‌ی محور تقارن) $x = -\frac{4}{2(-1)} = 2$ بوده و بیشترین مقدار آن به دو روش گفته شده:

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^{2} - 4(-1)(-3)}{4(-1)} = -\frac{4}{-4} = 1 \quad \text{و} \quad y_{\max} = -(2^{2}) + 4(2) - 3 = 1$$

مثال: در تابع $y=x(2-x)+4x-1$ موارد زیر را پاسخ دهید:

الف) نمودار این تابع دارای می‌نیمم است یا ماکزیمم؟

ب) طول نقطه‌ی می‌نیمم یا ماکزیمم و سپس عرض آن را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی محور تقارن نمودار را بنویسید.

پاسخ

الف) معادله را به صورت مرتب شده‌ی درجه دوم می‌نویسیم:

$$y=x(2-x)+4x-1=2x-x^2+4x-1 \Rightarrow y=-x^2+6x-1$$

چون ضریب x^2 منفی است، نمودار دارای ماکزیمم خواهد بود.

ب) طول نقطه‌ی ماکزیمم که همان رأس سهمی هم هست، چنین است:

$$x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-\frac{6}{2(-1)}=3$$

عرض این نقطه برابر مقدار ماکزیمم نمودار است:

$$y=-3^2+6(3)-1=-9+18-1=8$$

پ) واضح است که خط $x=3$ محور تقارن نمودار است.

---✧---

کاربردهایی از ماکزیمم یا می‌نیمم عبارت درجه دوم:

مثال: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل‌ضرب آن‌ها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو کدام است؟

پاسخ

عددها را با x و y نشان می‌دهیم و شرط داده شده به صورت $2x=y+6$ نوشته خواهد شد. پس می‌دانیم که $y=2x-6$ است. ضرب آن‌ها را بر حسب x بیان می‌کنیم:

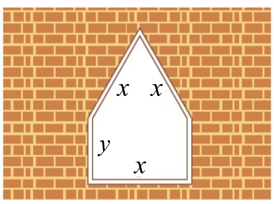
$$xy \Rightarrow x(2x-6)=2x^2-6x$$

می‌نیمم در $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2(2)}=\frac{3}{2}$ اتفاق می‌افتد. پس $y=2(\frac{3}{2})-6=-3$ بوده و مجموع دو عدد برابر است با:

$$x+y=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$$

---✧---

مثال: (از کتاب) یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



پاسخ

با استفاده از اندازه‌ی محیط:

$$x+y+x+x+y=4 \rightarrow 3x+2y=4 \Rightarrow y=2-\frac{3}{2}x$$

مساحت پنجره مجموع مساحت‌های یک مستطیل و یک مثلث متساوی الاضلاع است:

$$S = xy + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ = x(۲ - \frac{۳}{۲}x) + \frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲ \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳} - ۶}{۴}x^۲ + ۲x$$

چون $\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴}$ منفی است، S دارای ماکزیمم است (یعنی: بیشترین مساحت و نوردهی!) که در رأس: $x = -\frac{b}{۲a}$ رخ می‌دهد:

$$x = -\frac{۲}{۲(\frac{\sqrt{۳}-۶}{۴})} = \frac{۴}{۶ - \sqrt{۳}} \cong ۰/۹۴\ m \quad \Rightarrow \quad y = ۲ - \frac{۳}{۲}(۰/۹۴) = ۲ - ۱/۴۱ = ۰/۵۹m$$

---✧---

در ادامه، خصوصیات بیشتری از نمودار تابع درجه‌ی دوم بررسی می‌شود.

صفرهای تابع:

در مورد یک تابع $y = f(x)$:

هر نقطه‌ی برخورد نمودار با محور طول را یک «صفر» برای تابع گویند.

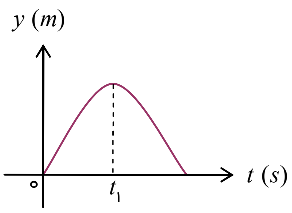
بنابراین:

صفرهای تابع f، همان جواب‌های معادله‌ی $f(x) = ۰$ هستند.

در نتیجه:

صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$، دقیقاً ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ هستند که در بخش قبل بررسی گردید.

مثال: اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $۳۰\frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب شود، ضابطه‌ی مکان (ارتفاع) آن بر حسب زمان (t) به صورت $y = -۵t^۲ + ۳۰t$ و نمودار مکان – زمان به صورت روبه‌رو است:



الف) نقاط برخورد نمودار با محور افقی چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) نقطه‌ی به طول $t_۱$ چه معنایی دارد؟

پاسخ

الف) چنان که می‌بینید، در نقاط برخورد با محور طول، ارتفاع گلوله برابر صفر است؛ نقطه‌ی سمت چپ شروع پرتاب $t = ۰$ و نقطه‌ی سمت راست، لحظه‌ی بازگشت گلوله به سطح زمین را نشان می‌دهد:

$$y = ۰ \rightarrow -۵t^۲ + ۳۰t = ۰ \rightarrow -۵t(t - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۰ \\ t = ۶ \end{cases}$$

پس گلوله بعد از ۶ ثانیه به زمین برگشته است.

ب) نقطه‌ی به طول $t_۱$ دقیقاً لحظه‌ای را نشان می‌دهد که گلوله به بالاترین ارتفاع خود رسیده است.

---✧---

مثال: نمودار تابع $y = x^۲ + mx - ۳$ نسبت به خط $x = ۱$ متقارن است. صفرهای تابع را مشخص کنید.

پاسخ

طبق رابطه‌ی $x=-\dfrac{b}{2a}$، محور تقارن به صورت $x=-\dfrac{m}{2(1)}=-\dfrac{m}{2}$ است. در نتیجه:

$$-\frac{m}{2}=1 \;\rightarrow\; m=-2$$

پس تابع به صورت $y=x^2-2x-3$ بوده و تقاطع نمودار با محور طول از حل معادله‌ی $y=0$ به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x-3=0 \;\rightarrow\; (x-3)(x+1)=0 \;\Rightarrow\; x=-1\,,\,3$$

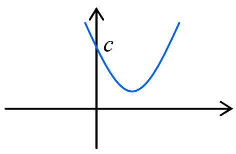
وضعیت نمودار:

در مورد وضع نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ در دستگاه مختصات به مواردی مهم توجه کنید:

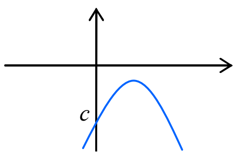
- نمودار همواره محور y ها را به عرض c قطع می‌کند:

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=c$$

- اگر $\Delta<0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. دقیق‌تر:
  - اگر $a>0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند.
  - اگر $a<0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.

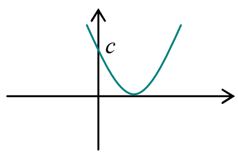


$(a>0)$

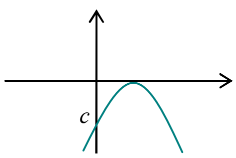


$(a<0)$

- اگر $\Delta=0$ باشد، نمودار بر محور طول‌ها مماس است. به‌طور دقیق:
  - اگر $a>0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.
  - اگر $a<0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.

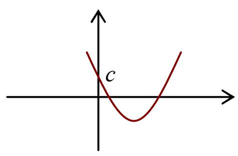


$(a>0)$

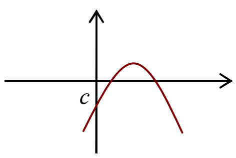


$(a<0)$

- اگر $\Delta>0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



$(a>0)$



$(a<0)$

مثال: محدوده‌ی m را طوری مشخص کنید که نمودار سهمی $y=(m-1)x^2+\sqrt{3}x+m$ همواره زیر محور طول باشد.

پاسخ

باید $\Delta<0$ و $a<0$ باشد. شرایط را اعمال کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$a<0:\quad m-1<0 \ \rightarrow\ m<1$$

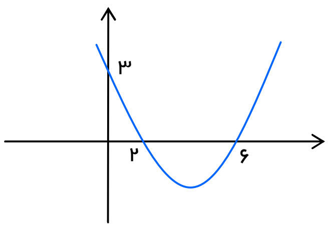
$$\Delta<0:\quad (\sqrt{3})^2-4(m-1)(m)<0$$

نامعادله‌ی دوم به صورت $-4m^2+4m+3<0$ نوشته می‌شود که با رسم جدول تعیین علامت، جواب آن به صورت:

$$m<-\frac{1}{2}\quad \text{یا}\quad m>\frac{3}{2}$$

حاصل می‌شود. اشتراک این جواب با شرط اول $m<1$ به صورت $m<-\frac{1}{2}$ است.

مثال: ضابطه‌ی سهمی شکل مقابل را بنویسید.



پاسخ

با توجه به صفرهای نمودار، ضابطه باید چنین باشد:

$$f(x)=a(x-2)(x-6)$$

بعلاوه، نقطه‌ی $(0,3)$ روی نمودار است و بنابراین:

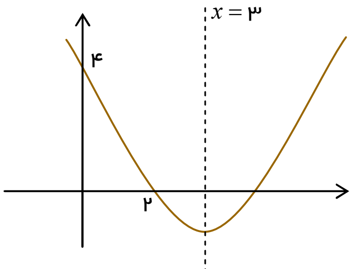
$$f(0)=3\ \rightarrow\ a(-2)(-6)=3\ \rightarrow\ a=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow\ f(x)=\frac{1}{4}\underbrace{(x-2)(x-6)}_{x^2-8x+12}\ \Rightarrow\ f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

روش دوم:

می‌توانستید ضابطه را به صورت $y=ax^2+bx+3$ گرفته و با جایگزینی نقاط $(2,0)$ و $(6,0)$، ضرایب را مشخص کنید.

مثال: ضابطه‌ی جبری سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ

چون تقاطع سهمی با محور عرض در ۴ است، ضابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$y=ax^2+bx+4$$

- چون عدد ۲ یک صفر تابع است:

$$0=a(2)^2+b(2)+4\ \rightarrow\ 4a+2b=-4$$

- چون $x=3$ محور تقارن نمودار است:

$$-\frac{b}{۲a}=۳ \to -b=۶a$$

از حل دستگاه $a=\frac{۱}{۲}$ و $b=-۳$ به‌دست آمده و ضابطه‌ی سهمی $y=\frac{۱}{۲}x^۲-۳x+۴$ است.

در پایان این بخش، تشخیص علامت صفرهای تابع سهمی (همان ریشه‌های معادله درجه دو) را بر حسب ضرایب معادله می‌آوریم. معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\Delta \geq ۰$ باشد. در این صورت همواره دو ریشه‌ی α و β وجود داشته و اطلاعات دقیق‌تری از آن‌ها در دو حالت بعدی **(بر حسب علامت $\frac{c}{a}$)** معلوم می‌گردد.

حالت ۱: $\frac{c}{a}>۰$

ضرب ریشه‌ها مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی هم علامت داشته؛ به علاوه:

- اگر $-\frac{b}{a}>۰$ باشد، آنگاه هر دو ریشه مثبت‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت مثبت شده است.)
- اگر $-\frac{b}{a}<۰$ باشد، آنگاه هر دو ریشه منفی‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت منفی شده است.)

برای نمونه؛

معادله‌ی $-۲x^۲+۵x-۱=۰$ دو ریشه‌ی مثبت دارد. زیرا:

$$\frac{c}{a}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}>۰ \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a}=-\frac{۵}{-۲}=\frac{۵}{۲}>۰$$

حالت ۲: $\frac{c}{a}<۰$

ضرب ریشه‌ها منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مثبت و منفی دارد. با فرض $\alpha<۰<\beta$ می‌توان گفت:

- اگر $-\frac{b}{a}>۰$ باشد، آنگاه $|\alpha|<|\beta|$؛ یعنی ریشه‌ی مثبت اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند -۳ و ۴.)
- اگر $-\frac{b}{a}<۰$ باشد، آنگاه $|\alpha|>|\beta|$؛ یعنی ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند -۳ و ۲.)

(توجه: در حالت $\frac{c}{a}<۰$، شرط $\Delta>۰$ خود به خود برقرار است.)

می‌دانیم:

اگر $-\frac{b}{a}=۰$ (یعنی: $b=۰$) باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی قرینه است: $\alpha=-\beta$.

برای نمونه؛

معادله‌ی $۲x^۲+۵x-۱=۰$ دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد و ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. زیرا:

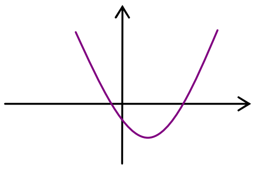
$$\frac{c}{a}=\frac{-۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}<۰ \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a}=-\frac{۵}{۲}<۰$$

توجه کنید:

اگر $\frac{c}{a}=0$ باشد، باید داشته باشیم: $c=0$. در این حالت یکی از جواب‌ها صفر است و جواب دیگر باید $-\frac{b}{a}$ باشد.
مانند نمونه‌ی زیر:

$$-2x^2+3x=0 \to x(-2x+3)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

مثال: در تابع $y=ax^2+bx+c$ با نمودار روبه‌رو، علامت تمام مقادیر a، b، c، Δ، s و p را مشخص کنید.



پاسخ

واضح است که $a>0$ و $c<0$. پس: $p=\frac{c}{a}<0$. چون طول رأس سهمی مثبت است:

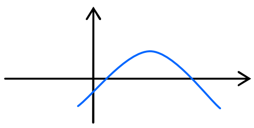
$$-\frac{b}{2a}>0 \to \frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0$$

در نتیجه: $s=-\frac{b}{a}>0$. بالاخره، چون نمودار دو نقطه‌ی برخورد با محور طول دارد، $\Delta>0$ است.

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در سهمی $y=ax^2+bx+c$ با نمودار داده شده، علامت $b\times c$ .... است.



پاسخ

می‌دانیم: $a<0$ و $c<0$. با توجه به مثبت بودن جمع ریشه‌ها:

$$-\frac{b}{a}>0 \to \frac{b}{a}<0 \xrightarrow{a<0} b>0$$

بنابراین $b\times c<0$، یعنی «منفی» است.

---✧---

مثال: وضعیت ریشه‌های معادله‌ی $2x^2-x-1-m^2=0$ را مشخص کنید.

پاسخ

چون $\frac{c}{a}=\frac{-1-m^2}{2}=-\frac{\overbrace{1+m^2}^{>0}}{2}<0$ است، معادله دارای دو ریشه‌ی مثبت و منفی است. بعلاوه، چون $-\frac{b}{a}=-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}>0$ است، باید ریشه‌ی مثبت اندازه‌ی بزرگ‌تری داشته باشد.

---✧---

پاسخ دهید (۳)

۱- مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم نمودار منحنی $y=-3x^2-6x+2$ و معادله‌ی محور تقارن آن را تعیین کنید.

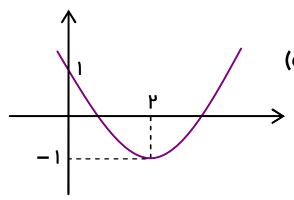
۲- قرار است در کنار ساحل دریا، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار، لازم است سه ضلعِ محوطه، نرده‌کشی شود. اگر فقط هزینه نصب ۶۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

۳- نمودار $y=x^2-2x+1+a$, $(a>0)$ محور طول‌ها را در چند نقطه قطع می‌کند؟

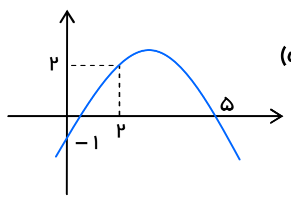
۴- اگر منحنی تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با چه طول مثبتی قطع می‌کند؟

۵- ضابطه‌ی سهمی داده شده در شکل‌های زیر را بنویسید.

(الف)



(ب)



منتخب کتاب:

۱- مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم توابع با ضابطه‌های زیر را به‌دست آورید:

الف) $f(x)=-2x^2+8x-5$ ب) $g(x)=3x^2+6x+5$

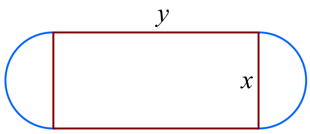
۲- موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می‌گیرد که معادله‌ی آن به صورت $h(t)=100t-5t^2, (t\geq 0)$ است.

الف) چقدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه‌ی اوج را بیابید.

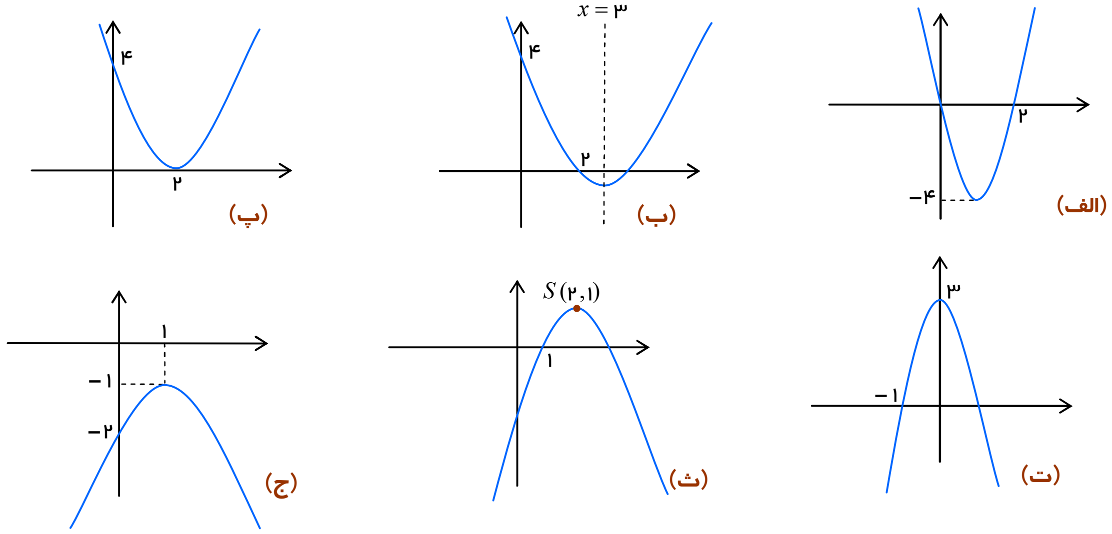
پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین باز می‌گردد؟

۳- استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن $x\geq 0$ و $y\geq 0$ و نیم دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{2}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که:



الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد. ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۴- ضابطه‌ی جبری سهمی‌های زیر را بنویسید:



چالش (ویژه علاقمندان)

در سهمی $y=x^2+(m-3)x+2m$، محدوده‌ی m را در هر یک از دو حالت زیر مشخص کنید:

الف) نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند.

ب) نمودار از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند.

۴ معادلات گویا و اصم

معادله‌ای شامل کسرهایی با صورت و مخرج چندجمله‌ای، را یک معادله‌ی گویا گوئیم. مانند:

$$\frac{x+۱}{۲-x}=۱+۲x$$

در این نوع معادلات، پذیرش جواب‌ها بستگی به دامنه دارد:

دامنه عبارت گویا:

در یک عبارت گویا، دامنه شامل تمام عددهای حقیقی، به جز ریشه‌های مخرج است:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

توجه کنید:

اگر عبارت گویا شامل چندین کسر باشد، باید ریشه‌های تمام آن‌ها از $\mathbb{R}$ کم شود.

مثال: دامنه‌ی معادله‌ی زیر را مشخص کنید.

$$\frac{x}{x^۲+۲x}=\frac{۱}{x}-\frac{۳}{x-۲}$$

پاسخ

ریشه‌های هر سه مخرج:

$$x^۲+۲x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۲ \end{cases} \quad \text{و} \quad x=۰ \quad \text{و} \quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

پس دامنه برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{۰,۲,-۲\}$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی گویا:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و سپس آن را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله‌ای که به‌دست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که در دامنه قرار داشته باشند.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است جایگذاری آن در تمام مخرج‌ها، هیچ کدام از آن‌ها را صفر نکند.

مثال: وضعیت جواب‌های معادله‌ی $2x+1=-\frac{3}{x}$ را مشخص کنید.

پاسخ

کافی است طرفین را در x ضرب کنیم؛ **(در واقع طرفین - وسطین)**

$$x\times(2x+1)=-x\times\frac{3}{x}\ \rightarrow\ 2x^2+x=-3\ \rightarrow\ 2x^2+x+3=0$$

در معادله‌ی حاصل، $\Delta=-23<0$ بوده و در نتیجه جوابی وجود ندارد.

---✵---

مثال: در معادله‌ی $\frac{x+1}{x}-\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}=\frac{x-1}{x-2}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

چون $x^2-2x=x(x-2)$، همین عبارت ک.م.م مخرج‌ها است. طبق روش بالا می‌نویسیم:

$$x(x-2)\times\frac{x-1}{x-2}=x(x-2)\times\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-x(x-2)\times\frac{x+1}{x}$$

$$\rightarrow\ x^2-x=x^2-2x+2-x^2-x+2x+2\ \rightarrow\ x^2=4\ \rightarrow\ x=\pm 2$$

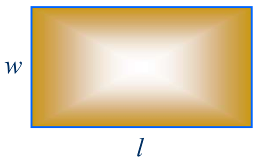
چون عدد ۲ مخرج دوتا از کسرها را صفر می‌کند، قابل قبول نبوده و فقط -2 پذیرفته می‌شود.

---✵---

چند کاربرد جالب حل معادلات گویا را می‌آوریم. شروع با معرفی یک مستطیل خاص:

مستطیل طلایی:

اگر در یک مستطیل به طول l و عرض w داشته باشیم:



$$\frac{l}{w}=\frac{l+w}{l}$$

یعنی:

«نسبت مجموع طول و عرض به طول» برابر «نسبت طول به عرض» مستطیل باشد؛

گوئیم: «مستطیل طلایی است» و «نسبت طول به عرض»، یعنی $\frac{l}{w}$ **«نسبت طلایی»** نامیده می‌شود.

مثال: (از کتاب) با انتخاب مستطیل طلایی با عرض ۱، طول آن $l=\frac{l}{1}=\frac{l}{w}$ که همان نسبت طلایی است را مشخص کنید.

پاسخ

طبق تناسب مربوطه به ازای $w=1$ داریم:

$$\frac{l}{1}=\frac{l+1}{l}\ \rightarrow\ l^2=l+1\ \rightarrow\ l^2-l-1=0\ \xrightarrow{\Delta=5}\ l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

عدد $1/618\cong\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ نسبت طلایی است.

---✵---

مثال: شش کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با ده کیلوگرم رنگ با غلظت ۵۵ درصد را مخلوط کرده‌ایم. چند کیلوگرم از مایع آن را تبخیر کنیم تا غلظت رنگ به ۵۰ درصد برسد؟

پاسخ

مقدار رنگ خالص در رنگ مخلوط قابل تعیین است:

$$۶\times\frac{۲۰}{۱۰۰}+۱۰\times\frac{۵۵}{۱۰۰}=۱/۲+۵/۵=۶/۷ \qquad \text{کیلوگرم}$$

پس در کل $۶+۱۰=۱۶$ کیلوگرم رنگ داریم که $۶/۷$ کیلوگرم از آن رنگ خالص است. مقدار مایع لازم برای تبخیر را x کیلوگرم بگیرید. باید:

$$\frac{۶/۷}{۱۶-x}=\frac{۵۰}{۱۰۰} \to \frac{۶/۷}{۱۶-x}=\frac{۱}{۲} \to ۲\times ۶/۷=۱۶-x \Rightarrow x=۱۶-۱۳/۴=۲/۶ \qquad \text{کیلوگرم}$$

---✦---

مثال: (از کتاب) اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ

فرض کنید ماشین (۱) دو برابر سریع‌تر از ماشین (۲) باشد. پس:

اگر ماشین (۱) در x ساعت کل کار را انجام دهد، ماشین (۲) در $۲x$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

اکنون اگر هر ماشین تنهایی یک ساعت کار کند، طبق اطلاعات بالا:

ماشین (۱) اندازه‌ی $\frac{۱}{x}$ از کل کار و ماشین (۲) اندازه‌ی $\frac{۱}{۲x}$ از کل کار را انجام خواهد داد.

پس اگر هر دو ماشین یک ساعت با هم کار کنند، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}$ از کار انجام می‌شود که طبق فرض سؤال برابر $\frac{۱}{۴}$ از آن است:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴x} ۴+۲=x \Rightarrow x=۶\ ,\ ۲x=۱۲$$

---✦---

مطلب بعدی در سؤالات نسبتاً قوی و برای حل سریع مورد نیاز است:

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a+\frac{۱}{a}$، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مطلب مهم زیر وجود دارند:

- اگر a مثبت باشد، همواره داریم $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{۱}{a}=۲$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=۱$ باشد.

- اگر a منفی باشد، همواره داریم $a+\frac{۱}{a}\leq -۲$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{۱}{a}=-۲$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=-۱$ باشد.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

با مشاهده‌ی دو عبارت معکوس، نکته‌ی قبل را به یاد آورید:

$$\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲} \to \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}+\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}=۲ \Rightarrow \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۱$$

معادله‌ی جدید را با طرفین وسطین جواب می‌دهیم:

$$x^۲-۲=۲x+۱ \to x^۲-۲x-۳=۰ \to x=-۱\ ,\ ۳$$

جواب‌های به‌دست آمده ریشه‌ی هیچ مخرجی از معادله نبوده و هر دو قابل قبول هستند.

در پایان این فصل، روش حل معادلات رادیکالی (اَصَم) مانند نمونه‌های زیر را ببینیم:

$$۲\sqrt{۱-x}+x=۱ \quad \text{یا} \quad \sqrt{x-۲}=۲+x$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی اصم:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رسانده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه کنید:

۱) چون مقادیر x نباید زیر رادیکال را منفی کنند، با حل نامعادلات مربوطه، می‌توان دامنه‌ی تغییر x را تعیین کرد.

برای نمونه؛

در معادله‌ی $۲\sqrt{-x}=\sqrt{۲x+۲}$، دامنه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} -x\ge ۰ \to x\le ۰ \\ ۲x+۲\ge ۰ \to ۲x\ge -۲ \to x\ge -۱ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} -۱\le x\le ۰$$

البته، چنان‌که در بند بعدی آورده‌ایم، تعیین دامنه‌ی x ضروری نیست.

۲) برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است که آن در معادله صدق کند.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

معادله‌ی $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$ را حل کنید.

پاسخ

معادله را به صورت $\sqrt{۲-x}=۱-۲x$ نوشته و روش بالا را به‌کار می‌بریم:

$$(\sqrt{۲-x})^۲=(۱-۲x)^۲ \to ۲-x=۱-۴x+۴x^۲ \to ۴x^۲-۳x-۱=۰$$

چون مجموع ضرایب صفر است، جواب‌ها ۱ و $-\frac{۱}{۴}=\frac{c}{a}$ هستند. آزمایش جواب‌ها در معادله:

$x=۱: \quad ۲(۱)=۱-\sqrt{۲-۱} \Rightarrow ۲\neq ۰$ **غیر قابل قبول:**

$x=-\frac{۱}{۴}: \quad ۲(-\frac{۱}{۴})=۱-\sqrt{۲-(-\frac{۱}{۴})} \rightarrow -\frac{۱}{۲}=۱-\sqrt{\frac{۹}{۴}} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۲}$ **قابل قبول:**

---✧---

مثال: معادلهٔ $۲x+\sqrt{۲x-۱}=۱$ را حل کنید.

پاسخ

طبق روش بالا می‌نویسیم:
$$\sqrt{۲x-۱}=۱-۲x \rightarrow ۲x-۱=(۱-۲x)^۲ \rightarrow ۲x-۱=۱-۴x+۴x^۲$$

معادله به صورت $۴x^۲-۶x+۲=۰$ مرتب شده و در نتیجه طبق روش تجزیه (یا روش کوتاه $x=۱$ و $x=\frac{c}{a}$) حل می‌شود:

$$(۲x)^۲-۳(۲x)+۲=۰ \rightarrow (۲x-۱)(۲x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۲x-۲=۰ \rightarrow x=۱ \end{cases}$$

جواب‌ها را در معادله آزمایش می‌کنیم:

$x=\frac{۱}{۲}: \quad ۲(\frac{۱}{۲})+\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})-۱}=۱ \Rightarrow ۱=۱$ **قابل قبول:**

$x=۱: \quad ۲(۱)+\sqrt{۲(۱)-۱}=۱ \Rightarrow ۳\neq ۱$ **غیرقابل قبول:**

پس فقط یک جواب $x=\frac{۱}{۲}$ مورد قبول خواهد بود.

روش دوم:

معادله را به صورت $\sqrt{۲x-۱}=۱-۲x$ نوشته و لازم است زیر رادیکال و همچنین سمت راست نامنفی باشند:

$$۲x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲} \quad و \quad ۱-۲x\geq ۰ \Rightarrow x\leq\frac{۱}{۲}$$

پس فقط عدد $\frac{۱}{۲}$ می‌تواند جواب این معادله باشد که جایگذاری در معادله، باعث پذیرش آن می‌شود:

$$۲(\frac{۱}{۲})+\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})-۱}=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

---✧---

مثال: معادلهٔ $\sqrt{x^۲+x}-\sqrt{-x}=۰$ را حل کنید.

پاسخ

چون دو عبارت رادیکالی داریم، یکی را در سمت چپ و دیگری را به سمت راست برده و مانند قبل:

$$\sqrt{x^۲+x}=\sqrt{-x} \rightarrow x^۲+x=-x \rightarrow x^۲+۲x=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x=-۲ \end{cases}$$

با آزمایش جواب‌ها می‌بینید که هر دو قابل قبول هستند:

$x=۰: \quad \sqrt{۰^۲+۰}-\sqrt{-۰}=۰ \Rightarrow ۰=۰$ **قابل قبول**

$x=-۲: \quad \sqrt{(-۲)^۲-۲}-\sqrt{-(-۲)}=۰ \Rightarrow \sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰$ **قابل قبول**

مثال: (از کتاب) توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشه‌ی حقیقی هستند.

الف) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$

ب) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

پاسخ

الف) اگر معادله را به صورت $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}=-۱$ بنویسید، سمت راست منفی است، ولی سمت چپ نمی‌تواند منفی شود.

ب) معادله را به صورت روبه‌رو بنویسید: $\underbrace{\sqrt{۱-x}}_{\geq ۰}=\underbrace{-\sqrt{x-۲}}_{\leq ۰}$

تساوی فقط برای عددی برقرار است که هر دو طرف را صفر کند، ولی سمت چپ با عدد ۱ و سمت راست با عدد ۲ صفر می‌شود.

پاسخ دهید (۴)

۱- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\dfrac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\dfrac{x+۱}{x}=\dfrac{x-۱}{x-۲}$

ب) $\dfrac{x+۲}{x-۱}=۱-\dfrac{۳}{x+۵}$

۲- اگر معادلات $\dfrac{۲}{x^۲-۲x}=\dfrac{x+۲}{x-۲}-\dfrac{۱}{x}$ و $\dfrac{۲k}{x+۲}=۶+kx$ جواب مشترک داشته باشند، مقدار k را بیابید.

۳- هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی به تنهایی برای این کار ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدید نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۴- در ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی، چقدر از آب را تبخیر کنیم تا محلول ۷ درصدی داشته باشیم؟

۵- در یک محلول آب نمک، نسبت وزن آب به وزن نمک برابر ۶ است. اگر ۱۵ گرم نمک به این محلول اضافه شود، نسبت وزن آب به وزن محلول $\dfrac{۳}{۴}$ خواهد شد. وزن محلول اولیه چقدر بوده است؟

۶- خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین المللی متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب شمال، از سرعت قطار ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

۷- روی خط $y=۲x+۱$، نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی $A(۳,۵)$ برابر ۵ باشد. (تعداد جواب‌ها چندتا است؟)

۸- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $\sqrt{x+2}+4=x$ (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

ب) $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{-x}$

پ) $2x+\sqrt{2x-1}=1$

ت) $\sqrt{x-4}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=2$

ث) $\frac{1}{\sqrt{t-3}}-\frac{2}{\sqrt{t}}=0$

منتخب کتاب:

۱- هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$ ب) $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=1$ پ) $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{m}}=2$

۲- علی به همراه چند نفر از دوستان خود ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۳- الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴- معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱، یکی از ریشه‌های آن باشد.

۵- اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت به طوری که: $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$. این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

نشان دهید معادله‌ی $\sqrt[4]{x^{10}+2x^6-9x^4+2x^3-12}+5\sqrt{x^4+3x}=0$ دقیقاً یک جواب دارد.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴