۱۲

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

حسابان دوازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

نهایی ۲۰

ساختار جدید

بهینه شده ویژه نهایی

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

حسابان دوازدهم

۱

تابع

۱ انتقال افقی و عمودی

دو حالت انتقال نمودار به صورت زیر یادآوری می‌شوند.

انتقال افقی:

وقتی نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای $a>0$؛

- در رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$:

نمودار $y=f(x)$ به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت چپ** منتقل می‌شود.

- در رسم نمودار $y=f(x-a)$:

نمودار $y=f(x)$ به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت راست** منتقل می‌شود.

دلیل:

اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_0)=y_0$، آنگاه انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به چپ، یعنی: (x_0-a,y_0) روی نمودار $y=f(x+a)$ قرار دارد:

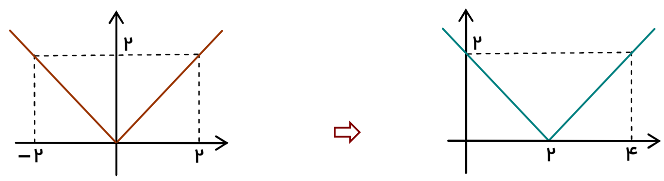
$$y=f(x+a)\xrightarrow{x=x_0-a}f((x_0-a)+a)=f(x_0)=y_0$$

به صورت مشابه؛

انتقال یافته‌ی نقطه به اندازه‌ی a به راست، یعنی: (x_0+a,y_0) روی نمودار $y=f(x-a)$ قرار دارد.

برای نمونه؛

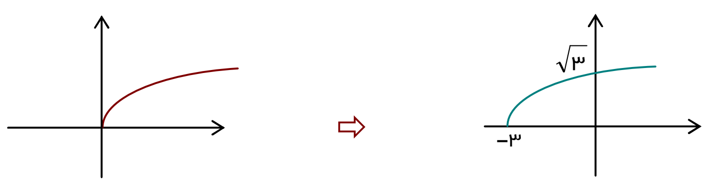
الف) نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم: (انتقال به راست)



$y=|x|$　　$y=|x-2|$

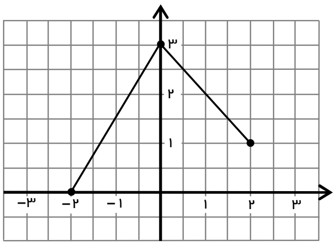
ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x+3}$ توسط نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم می‌شود: (انتقال به چپ)

(نمودار $\sqrt{x}$ توسط نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ و $(4,2)$ رسم شده است.)



$y=\sqrt{x}$　　$y=\sqrt{x+3}$

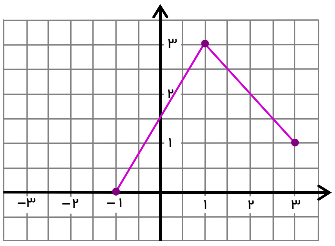
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱



نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.

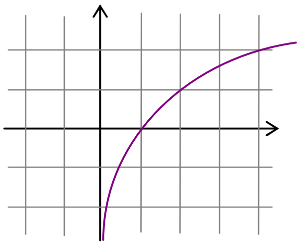
پاسخ



باید نمودار یک واحد به راست منتقل شود.

می‌بینید:

دامنه‌ی تابع g بازه‌ی $[-1,3]$ است.

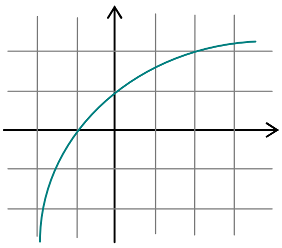


مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y=\log_2 x$ به صورت مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $y=\log_2(x+2)$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ

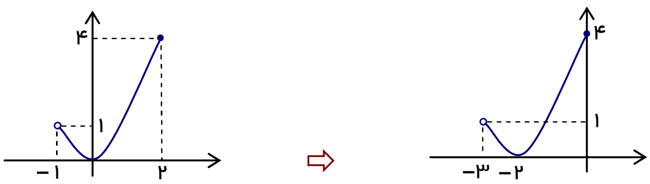
باید نقاط نمودار، دو واحد به چپ منتقل شوند:



مثال: نمودار تابع $y=(x+2)^2$ را توسط انتقال در بازه‌ی $(-3,0]$ رسم کرده و برد آن را معلوم کنید.

پاسخ

باید نمودار $y=x^2$ را در بازه‌ی $(-1,2]$ رسم کنیم تا بعد از ۲ واحد حرکت به چپ، دامنه‌ی آن $(-3,0]$ شود:



$y=x^2$ ⇨ $y=(x+2)^2$

می‌بینید که برد تابع در هر دو نمودار، بازه‌ی $[0,4]$ است.

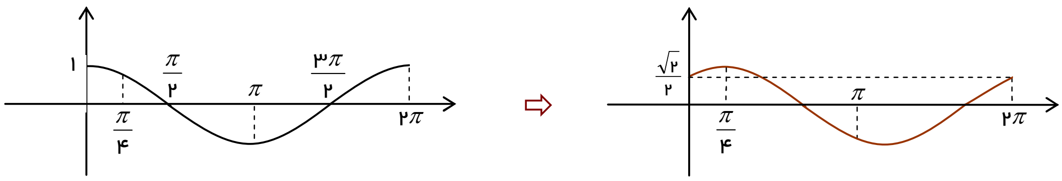
---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ را به کمک نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

پاسخ

باید ابتدا نمودار $y=\cos x$ را رسم کرده و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست انتقال دهیم:



---✧---

دو حالت ساده در تبدیل عمودی نمودار:

انتقال عمودی:

وقتی نمودار f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

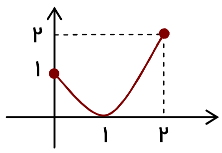
دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_۰)=y_۰$، آنگاه انتقال یافته‌ی عمودی نقطه به اندازه‌ی k، یعنی: $(x_۰,y_۰+k)$ روی نمودار $y=f(x)+k$ قرار دارد:

$$y=f(x)+k \xrightarrow{x=x_۰} f(x_۰)+k=y_۰+k$$

برای نمونه؛

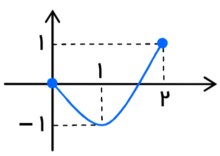
الف) نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر داده شده است:



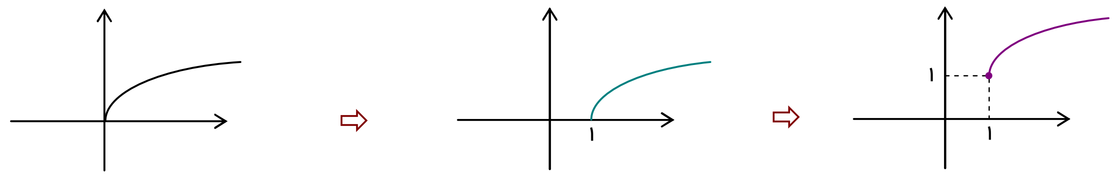
در رسم نمودار $y=f(x)-۱$، عرض هر نقطه یک واحد کم می‌شود:

دامنه و برد تابع جدید:

$$D=[۰,۲] \quad \text{و} \quad R=[-۱,۱]$$



ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{x-۱}+۱$ در دو مرحله توسط نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم می‌شود: (انتقال به راست و سپس به بالا)

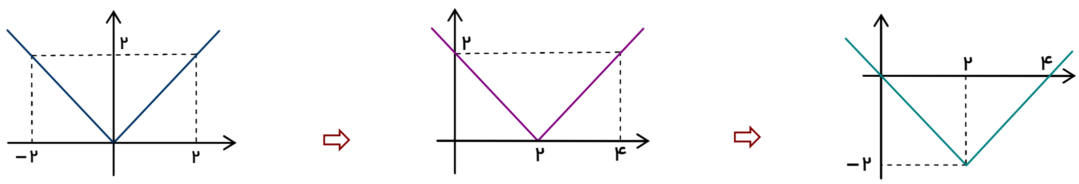


$y=\sqrt{x}$ ⇨ $y=\sqrt{x-۱}$ ⇨ $y=\sqrt{x-۱}+۱$

مثال: نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=|x|$ رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

ابتدا انتقال به راست $|x-۲|$ و سپس انتقال به پایین:

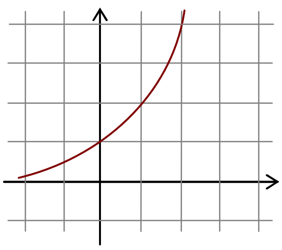


$y=|x|$ ⇨ $y=|x-۲|$ ⇨ $y=|x-۲|-۲$

می‌بینید که برد $R_f=[-۲,+\infty)$ است.

---✧---

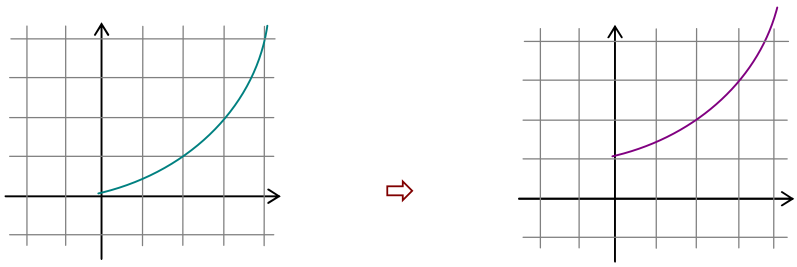
مثال: (مشابه کتاب) نمودار تابع $f(x)=۲^x$ به صورت مقابل رسم شده است.



نمودار تابع $y=۲^{x-۲}+۱$ را با انتقال رسم کنید.

پاسخ

ابتدا دو واحد به راست: $f(x-۲)=۲^{x-۲}$ و سپس یک واحد به بالا: $y=۲^{x-۲}+۱$.

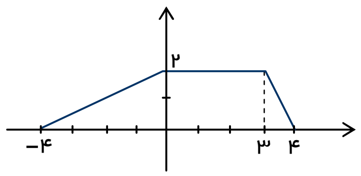


---✧---

(بررسی دقیق تأثیر انتقال نمودار بر دامنه و برد تابع، در بخش بعد انجام شده است.)

پاسخ دهید (۱)

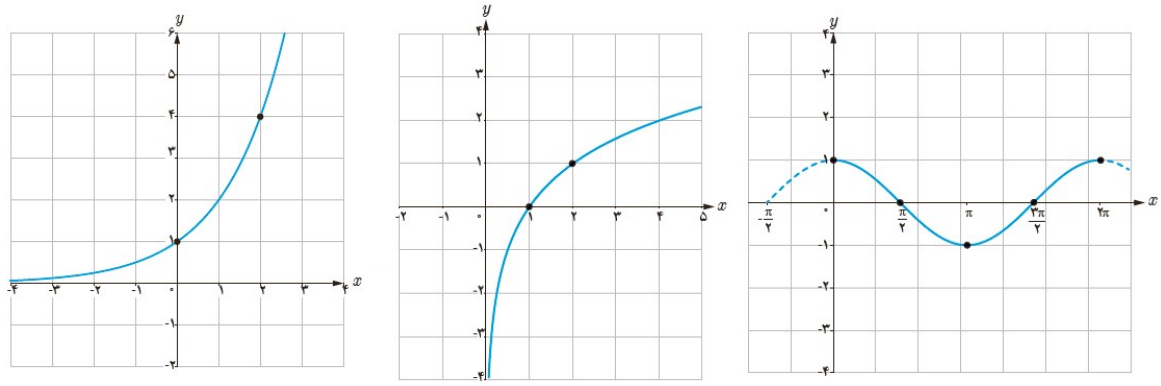
۱- با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو، نمودار $y=f(x-1)-1$ را رسم کنید.



۲- نمودار توابع $f(x)=\cos x+2$ و $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ را رسم کنید.

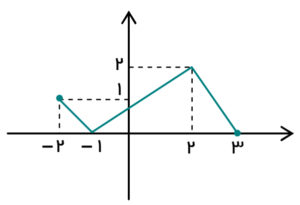
منتخب کتاب:

۱- در زیر، نمودار توابع $y=2^x$، $y=\log_2 x$ و $y=\cos x$ رسم شده‌اند. نمودار توابع $y=2^{x-1}+2$، $y=\log_2(x+2)$ و $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ را به کمک انتقال رسم کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

نمودار تابع f به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع $y=f(1+|x|)$ را رسم کنید.



۲ انبساط و انقباض نمودار

روشی دیگر در تبدیل عمودی نمودار:

انبساط و انقباض عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$، طول نقاط نمودار ثابت مانـده و فقـط عرض آن‌ها در عدد k ضرب می‌شود. به طور دقیق‌تر:

- اگر $k > ۱$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده‌تر می‌شود. (نمودار انبساط می‌یابد.)
- اگر $۰ < k < ۱$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع‌تر می‌شود. (نمودار انقباض می‌یابد.)

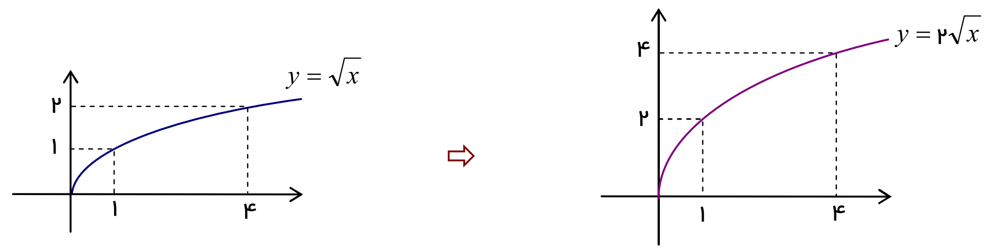
دلیل:

اگر نقطه‌ی $(x_۰ , y_۰)$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد: $f(x_۰) = y_۰$، آنگاه نقطه‌ی $(x_۰ , ky_۰)$ روی نمودار $y = k\,f(x)$ قرار دارد. زیرا:

$$y = kf(x) \xrightarrow{x=x_۰} kf(x_۰) = ky_۰$$

برای نمونه؛

هنگام رسم نمودار $y = ۲\sqrt{x}$، عرض تمام نقاط نمودار $y = \sqrt{x}$ در عدد ۲ ضرب می‌شود:



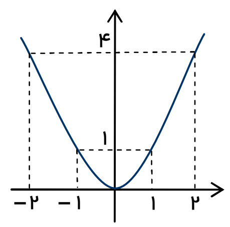
توجه کنید:

نقطه‌ی $(۱,۱)$ به $(۱,۲\times۱) = (۱,۲)$، نقطه‌ی $(۴,۲)$ به $(۴,۲\times۲) = (۴,۴)$ و البته نقطه‌ی $(۰,۰)$ بـه همـان $(۰,۰)$ تبـدیل شده و نمودار انبساط عمودی یافته است.

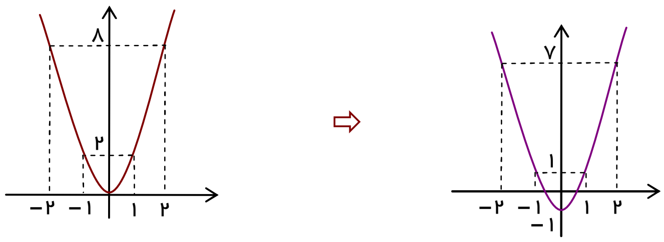
مثال: نمودار تابع $g(x) = ۲x^۲ - ۱$ را با تغییرات مناسب نمودار $y = x^۲$ رسم کنید.

پاسخ

ابتدا نمودار $y = x^۲$ را رسم می‌کنیم:

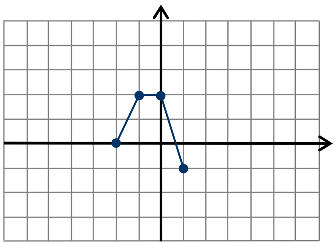


اکنون در دو مرحله نمودار تابع g رسم می‌شود:



---✡---

مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.
نمودار تابع $g(x)=2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

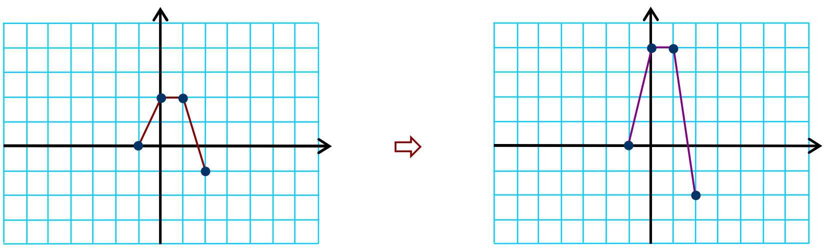


پاسخ

دو تبدیل متوالی لازم است:

اول: تبدیل $(x\to x-1)$، یک واحد انتقال به راست.

دوم: تبدیل $f(x-1)\to 2f(x-1)$، انبساط عمودی با $k=2$.



طبق نمودار پایانی:

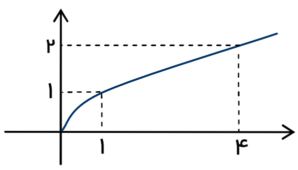
$$R_g=[-2,4] \quad \text{و} \quad D_g=[-1,2]$$

---✡---

مثال: با رسم نمودار $y=\sqrt{x}$، نمودار تابع $y=-2\sqrt{x}+1$ را رسم کنید.

پاسخ

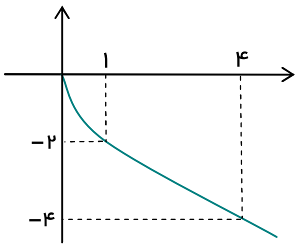
ابتدا نمودار $\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم:



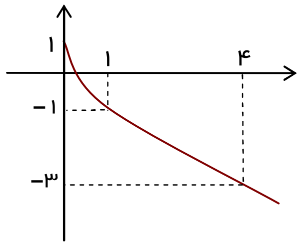
سپس در دو مرحله:

ابتدا ضرب عرض‌ها در -2 و سپس جمع عرض‌های جدید با عدد ۱، نمودار خواسته شده رسم می‌شود:

$y=-۲\sqrt{x}$



$\Rightarrow$



$y=-۲\sqrt{x}+۱$

می‌بینید در تابع آخر، برد $R=(-\infty,۱]$ است.

انبساط و انقباض معکوس:

چنان‌که در نمونه‌ی قبل می‌بینید، در رسم $y=kf(x)$، اگر k منفی باشد، نمودار f علاوه بر انبساط یا انقباض عمودی، نسبت به محور طول بازتاب هم می‌یابد.

حالت ویژه: (مهم)

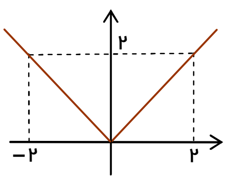
در رسم نمودار $y=-f(x)$، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

مثال: مساحت محدود به نمودار $y=-|x|+۲$ و محور طول‌ها را بیابید.

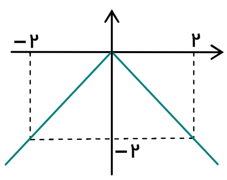
پاسخ

با دو جابجایی و به سادگی نمودار رسم می‌شود:



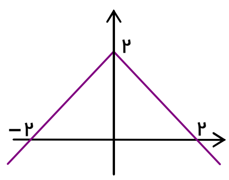
$y=|x|$

$\Rightarrow$



$y=-|x|$

$\Rightarrow$



$y=-|x|+۲$

می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر، مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

توجه کنید:

در تغییرات عمودی نمودار:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و معمولاً برد تغییر می‌کند.

توضیح بیشتر:

اگر برد تابع $f(x)$ به صورت $[y_۱,y_۲]$ باشد، آنگاه:

برد توابع $f(x)-k$ و $f(x)+k$ به ترتیب $[y_۱-k,y_۲-k]$ و $[y_۱+k,y_۲+k]$ هستند و برد $kf(x)$ برابر $[ky_۱,ky_۲]$ است. (اگر k منفی باشد: برد $[ky_۲,ky_۱]$ است.)

برای نمونه؛

اگر برد تابع f بازه‌ی $[-4,1]$ باشد، برد تابع $y=-2f(-\frac{x}{2})+1$ برابر $[-1,9]$ است، زیرا:

$$[-4,1]\xrightarrow{-2f(-\frac{x}{2})}[-2(1),-2(-4)]=[-2,8]\xrightarrow{-2f(-\frac{x}{2})+1}[-2+1,8+1]=[-1,9]$$

تبدیل مهم دیگری از نمودار توابع به صورت زیر است:

انبساط و انقباض افقی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$:

- ❖ نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار f انتخاب می‌کنیم.
- ❖ طول این نقاط بر k تقسیم شده و عرض نقطه ثابت می‌ماند.

بویژه:

- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده‌تر می‌شود، (انبساط می‌یابد.)
- اگر $k>1$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع‌تر می‌شود، (انقباض می‌یابد.)

دلیل:

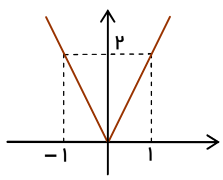
اگر نقطه‌ی (x_0,y_0) روی نمودار $y=f(x)$ باشد: $f(x_0)=y_0$، نقطه‌ی $(\frac{x_0}{k},y_0)$ روی نمودار $y=f(kx)$ قرار دارد:

$$y=f(kx)\xrightarrow{x=\frac{x_0}{k}}f(k(\frac{x_0}{k}))=f(x_0)=y_0$$

مثال: نمودار تابع $g(x)=|2x|$ را با تغییر مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

پاسخ

با توجه به نمودار $f(x)=|x|$ و طبق نکته‌ی قبل، نمودار $g(x)=f(2x)$ را رسم می‌کنیم:



$g(x)=|2x|$

$$(-2,2)\in f\xrightarrow{k=2}(\frac{-2}{2},2)=(-1,2)\in g$$

$$(0,0)\in f\longrightarrow(\frac{0}{2},0)=(0,0)\in g$$

$$(2,2)\in f\longrightarrow(\frac{2}{2},2)=(1,2)\in g$$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را تعیین کنید:

الف) اگر $k>1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به‌دست می‌آید.

ب) اگر نقطه‌ی $(-3,1)$ روی نمودار f باشد، نقطه‌ی $(-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ روی نمودار تابع $y=-2f(2x)$ است.

پاسخ

الف) نادرست است؛

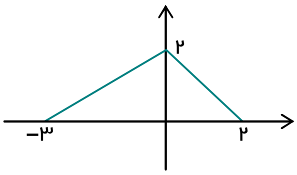
زیرا برای $k > 1$، نمودار به صورت افقی منقبض می‌شود.

ب) نادرست است؛

طول نقطه بر ۲ تقسیم شده و به $-\frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود، ولی عرض نقطه در ۲− ضرب می‌شود: $(-3,1) \to (-\frac{3}{2},-2)$

---✧---

✧**مثال:** نمودار تابع f به شکل مقابل است:



الف) نمودار $y = f(\frac{x}{2})$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع جدید را مشخص کنید.

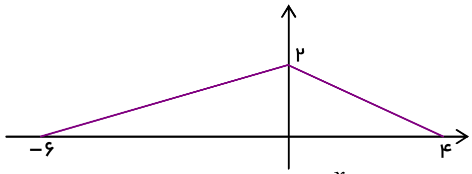
پاسخ

باید طول نقاط بر $k = \frac{1}{2}$ تقسیم شود؛ (یا: در ۲ ضرب شود.)

$$(-3,0) \in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} (\frac{-3}{\frac{1}{2}},0) = (-6,0)$$

$$(0,2) \in f \xrightarrow{0\times 2=0} (0,2)$$

$$(2,0) \in f \xrightarrow{2\times 2=4} (4,0)$$



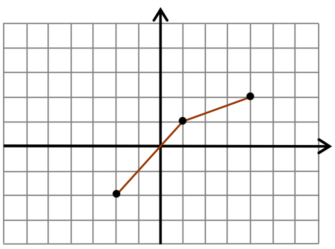
$y = f(\frac{x}{2})$

در نمودار حاصل شده، دامنه $[-6,4]$ و برد $[0,2]$ است.

---✧---

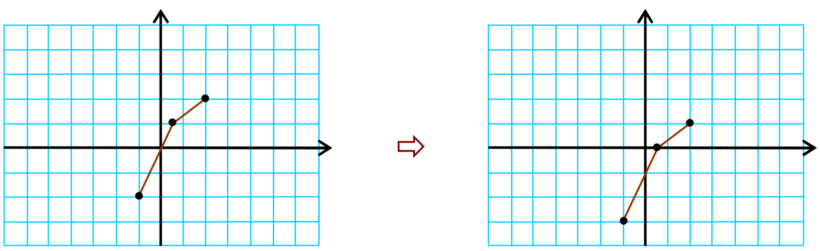
✧**مثال:** نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



پاسخ

ابتدا $f(2x)$ (تقسیم طول نقاط بر ۲) و سپس $g(x) = f(2x) - 1$ یعنی (یک واحد به پایین):



$f(2x)$ ⇨ $f(2x) - 1$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g = [-1,2] \quad \text{و} \quad R_g = [-3,1]$$

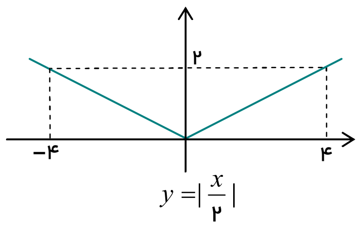
---✧---

مثال: نمودار تابع $h(x)=|\frac{x}{۲}|-۱$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

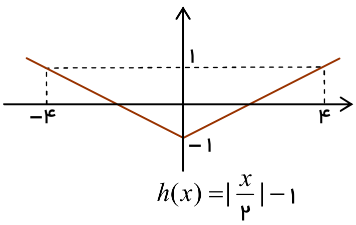
پاسخ

ابتدا مشابه نمونه‌های بالا، انبساط افقی $|\frac{x}{۲}|$ را رسم می‌کنیم:

$$(-۲,۲)\in f \longrightarrow (-۲\times ۲,۲)=(-۴,۲)$$
$$(۰,۰)\in f \longrightarrow (۰\times ۲,۰)=(۰,۰)$$
$$(۲,۲)\in f \longrightarrow (۲\times ۲,۲)=(۴,۲)$$



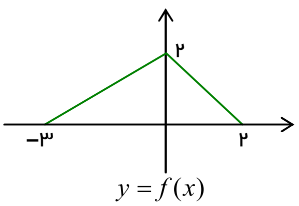
اکنون کافی است، عرض نقاط یک واحد کم شود:

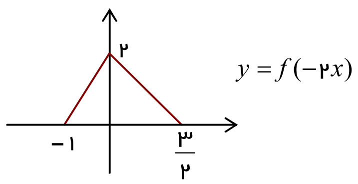


انبساط و انقباض معکوس:

در رسم $y=f(kx)$، اگر k منفی باشد، نمودار ضمن انبساط یا انقباض افقی، نسبت به محور عرض بازتاب هم می‌یابد.

برای نمونه:





حالت ویژه: (مهم)

اگر $k=-۱$ باشد، یعنی در رسم نمودار $y=f(-x)$:

نمودار $f(x)$ نسبت به محور عرض‌ها قرینه شود.

بعلاوه: (تکنیک مهم)

در مواردی که ضابطه‌ی تابع چندین تغییر گوناگون داشته، اگر x قرینه شده یا ضریب گرفته، تغییرات روی آن را در آخرین گام انجام دهید. برای نمونه:

- برای رسم $f(۲x-۱)$ چنین عمل کنید:

$$f(x)\longrightarrow f(x-۱)\longrightarrow f(۲x-۱)$$

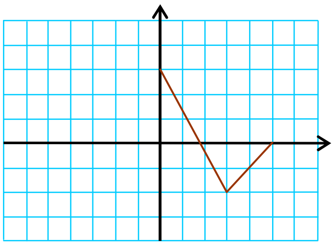
ابتدا یک واحد به راست و سپس تقسیم طول نقاط در ۲

- برای رسم $f(-۲x+۱)$ چنین عمل کنید:

$$f(x)\longrightarrow f(x+۱)\longrightarrow f(۲x+۱)\longrightarrow f(-۲x+۱)$$

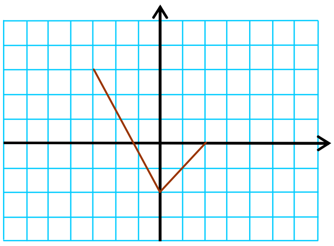
ابتدا یک واحد به چپ، سپس انقباض افقی با ضریب ۲ و در پایان قرینه نسبت به محور عرض

مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است.
نمودار تابع $g(x)=f(۳-x)$ را رسم کرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید.



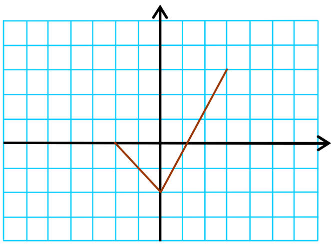
پاسخ

کافی است ابتدا $f(۳+x)$ (سه واحد انتقال به چپ) و سپس $f(۳-x)$ یعنی (قرینه نسبت به محور عرض) انجام گیرد:



$f(x+۳)$

⇨



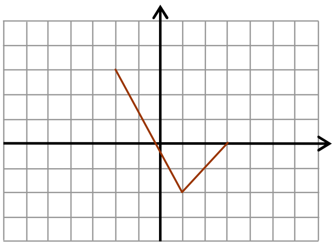
$f(-x+۳)$

در نمودار پایانی می‌بینید که:

$$D_g=[-۲,۳]$$

---✧---

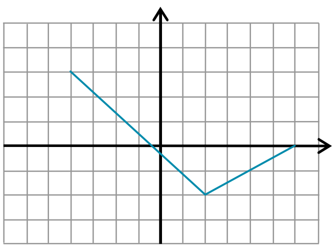
مثال: (مشابه کتاب) نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو داده شده؛
نمودار تابع $y=f(-\frac{x}{۲})$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.



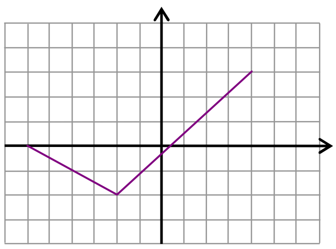
پاسخ

ابتدا نمودار $y=f(\frac{x}{۲})$ (انبساط افقی با ضریب ۲) و سپس نمودار $y=f(\frac{-x}{۲})$ (قرینه نسبت به محور عرض):

$y=f(\frac{x}{۲})$



⇨



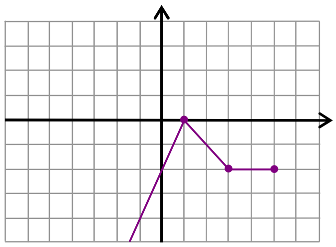
$y=f(-\frac{x}{۲})$

می‌بینید $D=[-۶,۴]$ و $R=[-۲,۳]$ است.

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو داده شده؛ نمودار تابع $y=-f(2x-1)$ را رسم کرده، دامنه و برد آن را تعیین کنید.



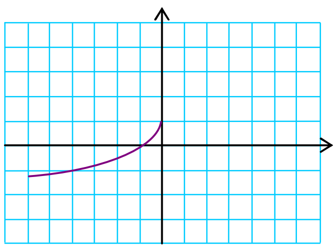
پاسخ

ابتدا نمودار $y=f(x-1)$ (یک واحد به راست)، سپس $y=f(2x-1)$ (انقباض افقی با ضریب ۲) و در پایان $y=-f(2x-1)$ (قرینه نسبت به محور طول):

می‌بینید $D=(-\infty,3]$ و $R=[0,+\infty)$ است.

---✧---

مثال: (مشابه کتاب) نمودار مقابل فقط توسط دو عمل انتقال و قرینه سازی از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به‌دست آمده است. ضابطه‌ی تابع مربوطه را بنویسید.



پاسخ

با قدری دقت می‌توان فهمید بعد از رسم نمودار $y=\sqrt{x}$:

اول: قرینه سازی نسبت به محور طول: $y=-\sqrt{x}$

دوم: قرینه سازی نسبت به محور عرض: $y=-\sqrt{-x}$

سوم: یک واحد انتقال عمودی به سمت بالا: $y=-\sqrt{-x}+1$

پس ضابطه‌ی تابع به صورت $y=-\sqrt{-x}+1$ است.

---✧---

توجه کنید:

در تبدیل‌های افقی نمودار، همیشه:

برد تابع ثابت مانده و فقط دامنه ممکن است تغییر کند.

بیان دقیق‌تر:

اگر دامنه‌ی تابع $f(x)$ به صورت $[x_1,x_2]$ باشد، با توجه به جابجایی‌های مربوطه:

- دامنه‌ی توابع $f(x-a)$ و $f(x+a)$ به ترتیب $[x_1+a,x_2+a]$ و $[x_1-a,x_2-a]$ هستند.
- دامنه‌ی $f(kx)$ برابر $[\frac{x_1}{k},\frac{x_2}{k}]$ است. (اگر k منفی باشد: $[\frac{x_2}{k},\frac{x_1}{k}]$.)

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید.

الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-4,1]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-2f(\frac{x}{2})$ برابر $[-2,\frac{1}{2}]$ است.

ب) برای رسم نمودار تابع $y=|2x-1|$ توسط نمودار $y=|x-1|$، کافی است طول هر نقطه از نمودار تابع دوم بر عدد ۲ تقسیم شود.

پاسخ

الف) نادرست است؛

چون طول نقاط بر $\frac{1}{2}$ تقسیم شده و خواهیم داشت: $[-4,1] \xrightarrow{\div\frac{1}{2}} D=[-8,2]$

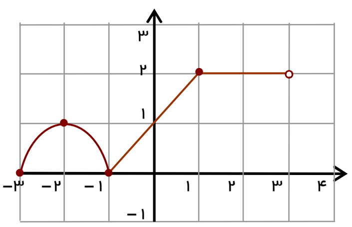
ب) درست است؛

اگر قرار دهیم: $f(x)=|x-1|$، در این صورت $f(2x)=|2x-1|$ بوده و روش گفته شده برای رسم صحیح است.

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. اگر تابع $g(x)=3f(\frac{1}{2}x)+1$ باشد، آنگاه:



الف) دامنه و برد تابع g را به صورت بازه بنویسید.

ب) اگر $A=(-2,1)$ یک نقطه از نمودار تابع f باشد، آنگاه نقطه‌ی متناظر A روی نمودار تابع g را بنویسید.

پاسخ

الف) دامنه: فقط انبساط افقی تأثیر دارد و برد: انبساط و انتقال عمودی؛

دامنه: $[-3,3) \xrightarrow{\div\frac{1}{2}} D_g=[-6,6)$ و **برد:** $[0,2] \xrightarrow{\times 3} [0,6] \xrightarrow{+1} R_g=[1,7]$

ب) ابتدا انبساط عمودی با ضریب ۳، سپس انتقال عمودی به اندازه‌ی $+1$ و در پایان انبساط افقی با ضریب ۲:

$$A=(-2,1) \xrightarrow{(1)} (-2,3) \xrightarrow{(2)} (-2,4) \xrightarrow{(1)} (\frac{-2}{\frac{1}{2}},4)=(-4,4)$$

---✧---

پاسخ دهید (۲)

۱- نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.

الف) $y=\cos 2x-1$ ب) $y=2\cos(\frac{x}{3})$

۲- نمودار تابع $y=-\sqrt{-x}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

منتخب کتاب:

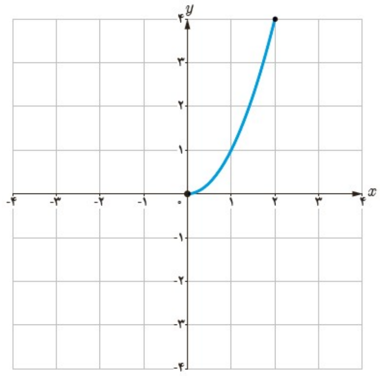
۱- نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کرده و با نمودار f مقایسه کنید.

$y = f(-x)$

$y = -f(x)$

$y = -f(-x)$



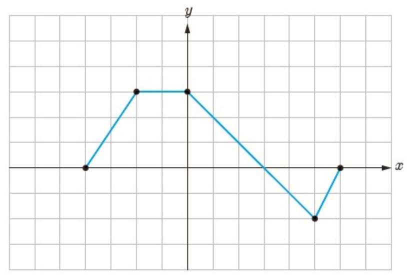
۲- نمودار تابع f به صورت مقابل است:

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

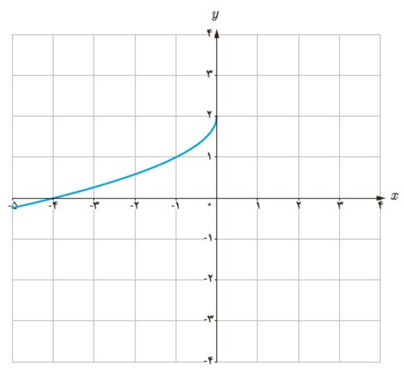
$y = f(-x) + ۲$

$y = f(۳ - x)$

$y = f(۲x - ۱)$



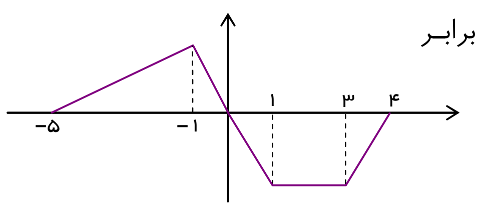
۳- نمودار زیر فقط از قرینه‌یابی و انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ حاصل شده؛ ضابطه‌ی آن را بنویسید.



چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

نمودار مقابل مربوط به تابع $f(۲x+۱)$ بوده و دامنه‌ی تابع $\sqrt{\frac{۱-x^۲}{f(x)}}$ برابر $[a,b)-\{c\}$ است. حاصل $b-a+c$ را بیابید.



۳ توابع چند جمله‌ای

شکل کلی تابع چندجمله‌ای:

$$f(x)=ax^{n}+bx^{n-1}+\cdots+kx+l$$

که ضرایب $a\neq ۰$، b، ....، k و l عددهایی حقیقی و $n\geq ۰$ (بیشترین توان x) عددی صحیح و درجه‌ی چندجمله‌ای است.

چند حالت ویژه از این توابع:

- **تابع ثابت:**

سادهترین تابع به صورت $f(x)=c$ چند جمله‌ای درجه‌ی صفر است. (c عدد ثابت)

- **تابع خطی:**

تابع به صورت $f(x)=ax+b$ چند جمله‌ای درجه‌ی یک می‌باشد.

- **تابع درجه دوم:**

این تابع به صورت $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ است، نمودارش همیشه یک سهمی است که در پایه یازدهم بررسی گردید.

- **تابع درجه سوم:**

به صورت کلی $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ است. بررسی بیشتری از آن در ادامه‌ی این درس انجام خواهد شد.

مثال: درجه‌ی تابع $f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۵}$ را مشخص کنید.

پاسخ

درجه‌ی ۷ است، زیرا:

بزرگ‌ترین درجه‌ی $(۱-x)^{۵}$ با پنج بار ضرب $(۱-x)$ در خودش، مربوط به جمله‌ی $-x^{۵}$ است و در نتیجه، در $f(x)=x^{۲}(۱-x)^{۵}$، بزرگ‌ترین درجه مربوط به $x^{۲}(-x^{۵})=-x^{۷}$ خواهد بود.

---✧---

مثال: در یک تابع خطی f، رابطه‌ی $f(x+۲)=f(x)+۲$ برقرار بوده و $f(۲)=۵$ است. مقدار $f(-۱)$ را حساب کنید.

پاسخ

طبق شرط اول با قرار دادن $x=۲$ داریم:

$$f(۲+۲)=f(۲)+۲ \Rightarrow f(۴)=۵+۲=۷$$

تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر گرفته و با جایگذاری مقادیر در ضابطه‌ی تابع می‌نویسیم:

$$f(۲)=۵ \rightarrow ۲a+b=۵$$
$$f(۴)=۷ \rightarrow ۴a+b=۷$$

از تفریق دو معادله $a=۱$ و سپس $b=۳$ به‌دست خواهند آمد و بنابراین:

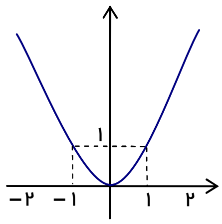
$$f(x)=x+۳ \Rightarrow f(-۱)=-۱+۳=۲$$

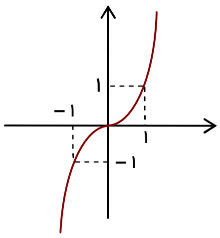
---✧---

مثال: ابتدا نمودار دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$ را رسم کنید و سپس توسط نمـودار، مجموعـه جـواب نامعادلـه‌هـای $f(x)>g(x)$ و $g(x)\geq f(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

هر دو نمودار با تشکیل جدول مقادیر به آسانی رسم می‌شوند:





x	۲-	۱-	۰	۱	۲
$y=x^2$	۴	۱	۰	۱	۴

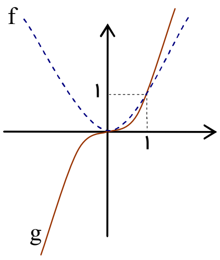
x	۲-	۱-	۰	۱	۲
$y=x^3$	۸-	۱-	۰	۱	۸

می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. یعنی:

$$0<x<1 \quad \Rightarrow \quad x^3<x^2$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

مجموعه جواب نامعادله‌ها با مقایسه‌ی نمودارها نوشته می‌شود:

$$f(x)>g(x) \quad \Rightarrow \quad x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$$
$$g(x)\geq f(x) \quad \Rightarrow \quad x\in\{0\}\cup[1,+\infty)$$

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

نمودار تابع $g(x)=x^3$ در فاصله‌ی $[0,1]$ پایین‌تر از نمودار تابع $f(x)=x^2$ قرار دارد. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

پاسخ

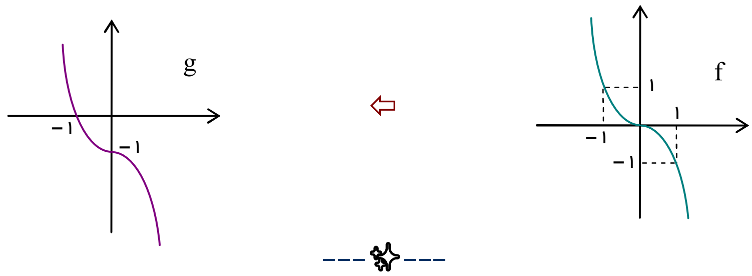
نادرست است:

در نقاط $x=0$ و $x=1$ نمودارها بر هم منطبق بوده، ولی بین ۰ و ۱ نمودار g پایین‌تر قرار دارد.

مثال: با توجه به نمودار $y=x^3$؛

الف) هنگام رسم نمودار $f(x)=-x^3$، نمودار تابع فوق نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

ب) برای رسم نمودار $g(x)=-x^3-1$، نمودار f یک واحد به پایین منتقل می‌شود.



---✧---

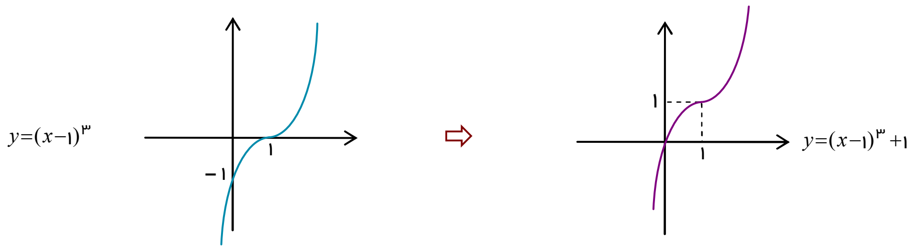
مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y=x^{3}-3x^{2}+3x$ را رسم کنید.

پاسخ

با اضافه و کم کردن عدد ۱ در سمت راست، ضابطه قابل رسم می‌شود:

$$y=x^{3}-3x^{2}+3x-1+1=(x-1)^{3}+1$$

طبق روش‌هایی که تا این‌جا دیده‌ایم:



---✧---

مثال: فقط مراحل رسم نمودار تابع $y=-(x-1)^{3}+3$ توسط نمودار $y=x^{3}$ را بیان کنید.

پاسخ

نمودار در طی سه مرحله رسم می‌شود:

- بعد از رسم $y=x^{3}$، نمودار یک واحد به راست منتقل شده تا $y=(x-1)^{3}$ رسم شود.
- نمودار حاصل در مرحله‌ی قبل را نسبت به محور طول قرینه کرده تا $y=-(x-1)^{3}$ رسم شود.
- عرض نقاط نمودار حاصل از مرحله‌ی قبل را با عدد ۳ جمع کرده تا $y=-(x-1)^{3}+3$ رسم شود.

---✧---

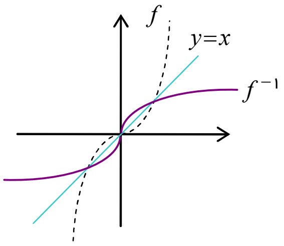
مثال: (از کتاب) با توجه به نمودار $f(x)=x^{3}$، نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است. سپس، نمودار f^{-1} را رسم کرده و ضابطه‌ی تابع وارون را تعیین کنید.

پاسخ

چون هر خط افقی نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند، تابع f یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

رسم f^{-1}:

با قرینه سازیِ نمودار f نسبت به خط $y=x$ انجام می‌شود:

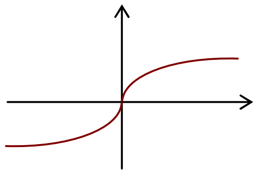


تعیین ضابطه‌ی وارون به روش گفته شده در پایه‌ی یازدهم:

$$y=x^{3} \rightarrow x=\sqrt[3]{y} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$$

نتیجه:

طبق آن‌چه در مثال قبل دیدیم، تابع $y=\sqrt[3]{x}$ با دامنه و برد $\mathbb{R}$، نموداری به صورت زیر دارد:



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

تابع $f(x)=(x-2)^{3}+1$ را در نظر بگیرید؛ نمودار f^{-1} از ناحیه .... محورهای مختصات عبور نمی‌کند.

جواب: چهارم!

با رسم تابع f، می‌بینید نمودار آن از ناحیه‌ی دوم عبور نکرده و در نتیجه، بعد از قرینه‌سازی نسبت به خط $y=x$، نمودار f^{-1} از ناحیـه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد. (روش دیگر تعیین ضابطه‌ی f^{-1} و رسم تقریبی آن با تغییرات نمودار $y=\sqrt[3]{x}$)

پاسخ دهید (۳)

۱– نمودار تابع $y=۲-x^۳$ را به کمک نمودار $f(x)=x^۳$ رسم کنید.

۲– اگر $f(x)=x^۳$ باشد، با رسم نشان دهید نمودارهای دو تابع $y=f(x-۱)$ و $y=f(x)-۱$ در دو نقطه مشترک هستند.

منتخب کتاب:

۱– تابع $f(x)=(x-۲)^۳+۱$ داده شده است.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

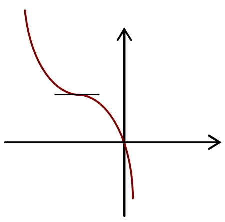
ب) نشان دهید این تابع وارون‌پذیر است و نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.

پ) ضابطه‌ی تابع وارون را به‌دست آورید.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=-۴\alpha-(x-\alpha)^۳$ است. کمترین مقدار k را چنان تعیین کنید تا نمودار تابع $g(x)=(x+۲\alpha)^۳+k$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند.



۴ توابع یکنــوا

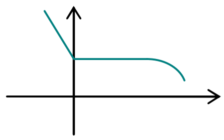
فرض کنید تابع f روی مجموعه‌ی A تعریف شده باشد و $x_1, x_2 \in A$:

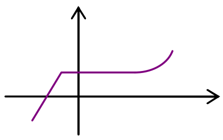
❖ f را روی A **«صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا زیاد شود.

❖ f را روی A **«نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا کم شود.


تابع نزولی


تابع صعودی

بنابراین:

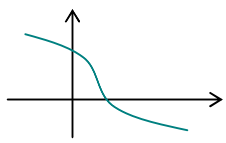
در تابع صعودی، با حرکت از چپ به راست روی نمودار، هیچ‌گاه رو به پایین نخواهیم رفت. (به همین شکل، تابع نزولی را توصیف کنید.)

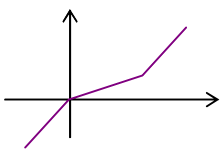
❖ تابع f را روی A **«اکیداً صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع الزاماً زیاد شود.

❖ تابع f را روی A **«اکیداً نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی:

با زیاد شدن x ، مقدار تابع الزاماً کم شود.


تابع اکیداً نزولی


تابع اکیداً صعودی

بنابراین:

با حرکت از چپ به راست روی نمودار یک تابع اکیداً نزولی، همواره رو به پایین خواهیم رفت. (به همین شکل، یک تابع اکیداً صعودی را توصیف کنید.)

نام‌گذاری:

تابع صعودی یا نزولی را **«یکنوا»** و تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را **«اکیداً یکنوا»** گوییم.

توجه کنید:

طبق تعریف، تابع اکیداً صعودی، صعودی هم هست و تابع اکیداً نزولی، نزولی هم محسوب می‌شود.

مثال: تابع ثابت $f(x)=k$ روی $\mathbb{R}$ شرط صعودی بودن را دارد، زیرا $f(x_1)\le f(x_2)$ همان $k\le k$ بوده که برقرار است.
واضح است که تابع ثابت، نزولی هم هست. بنابراین:

تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است؛ ولی اکیداً یکنوا نیست.

نهایی؛ خرداد ۱۳۹۹

اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیداً صعودی هم خواهد بود. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

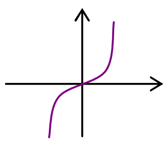
پاسخ

نادرست است؛
برای نمونه، تابع ثابت $f(x)=1$ صعودی است، ولی اکیداً صعودی نیست.

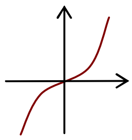
مثال: با رسم، یکنوایی توابع $y=x^3$، $y=x|x|$، $y=|x|+x$ و $y=[x]$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

پاسخ

- نمودار تابع $y=x^3$ را قبلاً دیده‌ایم و صعودی اکید است:

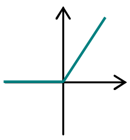


- نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر بوده و صعودی اکید است:



$$y=x|x|=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\ge 0\end{cases}$$

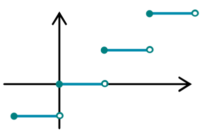
- نمودار تابع $y=|x|+x$ به‌صورت زیر، صعودی هست، ولی صعودی اکید نیست:



$$y=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\ge 0\end{cases}$$

البته تابع روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

- نمودار تابع $y=[x]$ پله‌ای و صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

تابع $f(x)=(1-x)^3$ تابعی اکیداً نزولی است. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

جواب: درست است؛ زیرا:

روش اول:

$$x_1 < x_2 \rightarrow -x_1 > -x_2 \rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \rightarrow (1-x_1)^3 > (1-x_2)^3 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

روش دوم

کافی است نمودار $y=(x+1)^3$ را در نظر گرفته و سپس قرینه‌سازی نسبت به محور عرض: $y=(-x+1)^3$ را انجام دهید.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

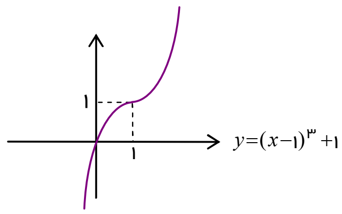
نمودار تابع $g(x)=x^3-3x^2+3x$ را به کمک نمودار $f(x)=x^3$ رسم کنید، سپس یکنوایی اکید تابع $g(x)$ را در تمام دامنه‌ی خود بررسی کنید.

پاسخ

نمودار تابع را چند صفحه قبل‌تر، به صورت روبه‌رو رسم کردیم.

طبق نمودار:

تابع در کل دامنه‌اش $\mathbb{R}$، اکیداً صعودی است.

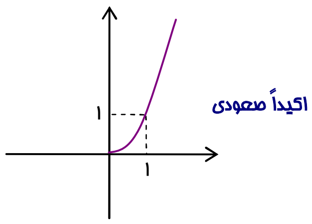


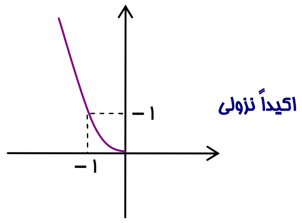
توجه کنید:

چنان‌که در نمونه‌های قبل هم دیدم، گاهی تابع روی تمام دامنه‌ی خود یکنوا نیست؛ اما می‌توان دامنه‌ی آن را طوری محدود کرد، تا در آن دامنه یکنوا باشد. نمونه‌ی دیگر:

تابع $y=x^2$ روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست، ولی:

- روی بازه‌ی $[0,\infty)$ اکیداً صعودی است.
- روی بازه‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی است.





مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید:

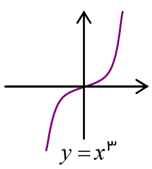
الف) تابع $y=-x^3$ در بازه‌ی $(-\infty,0)$ صعودی است.

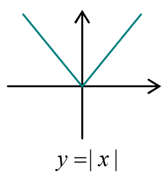
ب) تابع $y=|x|$ در بازه‌ی $[-3,0]$ اکیداً نزولی است.

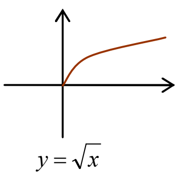
پ) تابع $y=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

پاسخ

نمودارهای سه تابع زیر را در نظر می‌گیریم:







الف) نادرست است؛

اگر نمودار $y = x^۳$ را نسبت به محور طول قرینه کنید، نمودار همواره اکیداً نزولی خواهد شد.

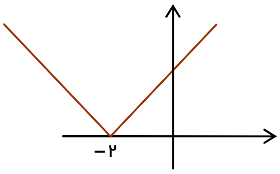
ب) با توجه به نمودار درست است.

پ) با توجه به نمودار نادرست است.

مثال: تابع $h(x) = |x+۲|$ در چه بازه‌ای اکیداً صعودی است؟

پاسخ

به روش انتقال افقی، نمودار تابع رسم می‌شود:



تابع در بازه‌ی $[-۲, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

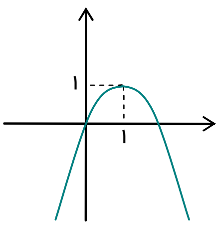
مثال: محدوده‌ی x را طوری تعیین کنید که تابع $y = ۲x - x^۲$ در آن محدوده نزولی باشد.

پاسخ

ضابطه را با اضافه و کم کردن عدد ۱ به صورت مناسب زیر می‌نویسیم:

$$y = ۲x - x^۲ - ۱ + ۱ = -(x^۲ - ۲x + ۱) + ۱ \quad \Rightarrow \quad y = -(x-۱)^۲ + ۱$$

حالا می‌توانیم با تغییر نمودار $y = x^۲$، نمودار تابع را رسم کنیم:



با نگاه به نمودار می‌بینید:

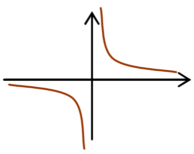
تابع در بازه‌ی $[۱, +\infty)$ اکیداً نزولی (همچنین نزولی) است.

مثال: نمودار توابع $f(x) = -\frac{۱}{x}$ و $g(x) = x - |x|$ را رسم کرده و فواصل یکنوایی هر یک را مشخص کنید.

پاسخ

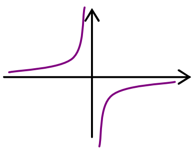
- **نمودار** f:

ابتدا نمودار شناخته شده‌ی $y = \frac{۱}{x}$ را رسم می‌کنیم.



$y = \frac{۱}{x}$

اکنون نمودار نسبت به محور طول قرینه می‌شود:



$y = -\frac{۱}{x}$

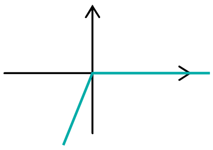
می‌بینید که:

تابع روی دامنه یکنوا نیست، ولی در هر دو بازه‌ی $(۰, +\infty)$ و $(-\infty, ۰)$ اکیداً صعودی است.

- **نمودار** g:

ضابطه را باز کرده و نمودار متشکل از دو نیم‌خط را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ ۰ & x\geq ۰ \end{cases}$$



می‌بینید که:
تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی است. (البته فقط روی $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی است.)

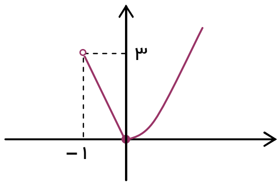
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

با رسم نمودار تابع $y=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -۳x & -۱<x<۰ \end{cases}$ تعیین کنید تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

پاسخ

برای $x\geq ۰$ نمودار با انتقال نیم‌سهمی $y=x^۲$ و برای $-۱<x<۰$ پاره‌خطی توسط $y=-۳x$ رسم می‌شود:

$$y=-۳x:\ \begin{cases} x=-۱ \Rightarrow y=۳ \\ x=۰ \Rightarrow y=۰ \end{cases}$$



تابع در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه‌ی $(-۱,۰]$ اکیداً نزولی است. (ولی در کل روی دامنه یکنوا نیست.)

وقتی ضابطه شامل چند قدرمطلق است، برای رسم، ضابطه را باز کنید.

مثال: نمودار تابع $y=|x+۲|+|x|$ را رسم کرده و محدوده‌ای را مشخص کنید که تابع در آن صعودی است.

پاسخ

با توجه به ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها، ضابطه باز می‌شود:

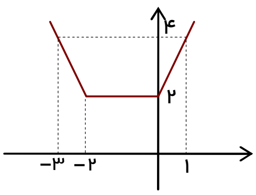
$$|x+۲|:\ x+۲=۰ \rightarrow x=-۲ \quad \text{و} \quad |x|:\ x=۰$$

بنابراین با توجه به علامت داخل قدر مطلق‌ها در هر محدوده:

$$y=\begin{cases} -(x+۲)-x & x<-۲ \\ x+۲-x & -۲\leq x\leq ۰ \\ x+۲+x & x>۰ \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -۲x-۲ & x<-۲ \\ ۲ & -۲\leq x\leq ۰ \\ ۲x+۲ & x>۰ \end{cases}$$

با تشکیل جدول مقادیر، نمودار خط شکسته‌ی تابع رسم می‌شود:

x	-۳	-۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴



تابع در $[-۲,+\infty)$ صعودی است.

کاربرد:

از یکنوایی تابع می‌توان در حل برخی نامعادلات کمک گرفت.

❖ اگر تابع f اکیداً صعودی باشد:

$$\boxed{f(a)\le f(b)\ \Rightarrow\ a\le b}$$

❖ اگر تابع f اکیداً نزولی باشد:

$$\boxed{f(a)\le f(b)\ \Rightarrow\ a\ge b}$$

یادآوری:

هر دو تابع نمایی $y=a^x$ و لگاریتمی $y=\log_a x$ در حالت $a>1$ اکیداً صعودی و در حالت $0<a<1$ اکیداً نزولی هستند.

(البته: دامنه‌ی تابع نمایی $\mathbb{R}$ و دامنه‌ی تابع لگاریتمی $(0,+\infty)$ است.)

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

اگر $(\frac{1}{5})^{2x+1}\le\frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.

پاسخ

چون تابع نمایی $y=(\frac{1}{5})^x$ اکیداً نزولی است:

$$(\frac{1}{5})^{2x+1}\le(\frac{1}{5})^3\ \to\ 2x+1\ge 3\ \to\ 2x\ge 2\ \Rightarrow\ x\ge 1$$

مثال: اگر $\log(x+1)\le\log(2x-3)$، حدود x را به‌دست آورید.

پاسخ

چون تابع $y=\log x$ اکیداً صعودی است، از نامعادله نتیجه می‌شود که: $(x+1)\le(2x-3)$. بنابراین:

$$x-2x\le -1-3\ \to\ -x\le -4\ \Rightarrow\ x\ge 4$$

توجه کنید:

طبق دامنه، باید شرایط $x+1>0$ و $2x-3>0$ نیز برقرار باشند که در محدوده‌ی جواب بالا، هر دو برقرار هستند.

پاسخ دهید (۴)

۱- ابتدا نمودار تابع $f(x)=x^2+2x$ را رسم کرده و سپس تعیین کنید این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟ (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱)

۲- نمودار توابع $f(x)=2^{-x}$ و $g(x)=\log_{\frac{1}{3}} x$ را رسم کرده و یکنوایی هر یک را مشخص کنید.

۳- فرض کنید توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند.

الف) نشان دهید $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است.

ب) نشان دهید $y=kf(x)$ با شرط $k>۰$ اکیداً صعودی و با شرط $k<۰$ اکیداً نزولی است.

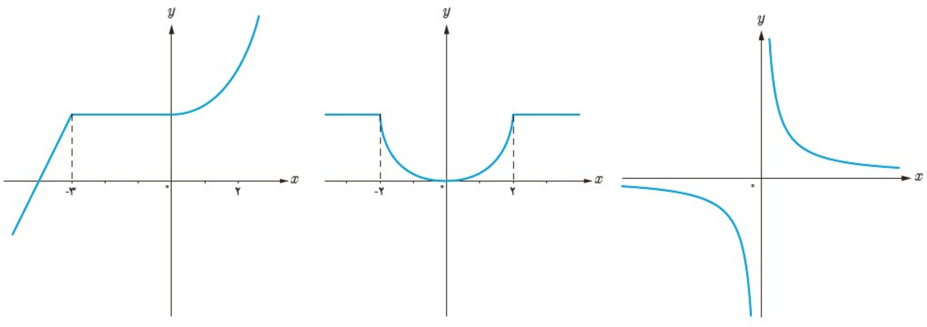
پ) در مورد تابع $f-g$ چه می‌توان گفت؟

(موارد بالا به طور مشابه در مورد مفهوم اکیداً نزولی هم برقرار هستند. قسمت (الف)، سؤال نهایی خرداد ۴۰۳)

۴- نامعادله‌ی $(\sqrt{۳}+۱)^{۲x}<(\sqrt{۳}+۱)^{x^۲-۲x}$ را حل کنید.

منتخب کتاب:

۱- نمودار توابع f، g و h داده شده‌اند:



$y=f(x)$ $\quad$ $y=g(x)$ $\quad$ $y=h(x)$

الف) تابع f در چه فاصله‌هایی اکیداً صعودی و در چه فاصله‌هایی صعودی است؟

ب) تابع g در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی و در چه فاصله‌هایی نزولی است؟

پ) تابع h در چه فاصله‌هایی اکیداً نزولی است؟

۲- نمودار توابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ و $g(x)=\log_۲ x$ را رسم کرده و یکنوایی هر یک را مشخص کنید.

۳- الف) آیا تابعی وجود دارد که در یک فاصله، هم صعودی باشد و هم نزولی؟

ب) نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $[۰,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.

۴- الف) فرض کنید تابع f در یک بازه اکیداً نزولی بوده و a و b متعلق به این بازه باشند.
اگر $f(a)\le f(b)$، نشان دهید: $a\ge b$.

ب) اگر $(\frac{۱}{۲})^{۳x-۲}\le\frac{۱}{۶۴}$، حدود x را بیابید.

چالش (ویژه علاقمندان) CHALLENGE

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-۲x+۶}+۲$ را در نظر گرفته و دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x)-f^{-1}(x)}$ را مشخص کنید.

۵ تقسیم چند جمله‌ای ها

در این بخش، تقسیم چند جمله‌ای‌ها و تجزیه‌ی برخی عبارات، در حد نیازهای ادامه‌ی این درس طرح و بررسی می‌شود.

مثال: تقسیم $f(x)=x^3+2x^2-4x-5$ بر $x+2$ را ببینید.

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2-4x-5 & x+2 \\ \cline{2-2} -(x^3+2x^2) \qquad\quad & x^2-4 \\ \cline{1-1} 0+0-4x-5 & \\ -(-4x-8) & \\ \cline{1-1} +3 & \end{array}$$

در نتیجه:

خارج قسمتِ تقسیم x^2-4 و باقی‌مانده عدد 3 حاصل گردید و چند جمله‌ای x^3+2x^2-4x-5 برابر عبارت زیر است:

$$(x+2)(x^2-4)+3$$

توجه کنید:

هر وقت بخواهید مانند بالا، تقسیم را انجام داده و خارج قسمت را مشخص کنید، باید ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را از توان بزرگ به کوچک مرتب کنید. (البته، تعیین باقی‌مانده بدون انجام تقسیم را در ادامه خواهیم دید.)

قضیه تقسیم:

در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر چند جمله‌ای $p(x)$ همواره:

دو چند جمله‌ای یکتای $q(x)$ و $r(x)$ یافت می‌شوند که:

اولاً: تساوی مقابل برقرار باشد: $f(x)=p(x)q(x)+r(x)$

ثانیاً: درجه‌ی $r(x)$ از درجه‌ی $p(x)$ کوچک‌تر باشد.

$q(x)$ خارج قسمت و $r(x)$ باقی مانده‌ی تقسیم است.

بررسی یک خاصیت:

درمثال قبل، اگر ریشه‌ی مقسوم علیه، یعنی:

$$x+2=0 \rightarrow x=-2$$

در عبارت $f(x)=x^3+2x^2-4x-5$ (یعنی: مقسوم) قرار گیرد، می‌بینید باقی‌مانده به‌دست می آید:

$$f(-2)=(-2)^3+2(-2)^2-4(-2)-5=-8+8+8-5=3$$

روش سریع تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم مانند بالا است.

باقی‌مانده و بخش‌پذیری:

باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ عبارت است از $R=f(a)$. بنابراین:

عبارت $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است، هر گاه $f(a)=0$ باشد.

دلیل:

اگر $Q(x)$ خارج قسمت و R باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ باشند، خواهیم داشت:

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R \xrightarrow{x=a} f(a)=\underbrace{\circ\times Q(a)}_{=\circ}+R$$

توجه کنید:

حتی اگر مقسوم علیه به صورت $ax+b$ باشد، تعیین باقی‌مانده و شرط بخش‌پذیری مانند بالاست.

ریشه را تعیین می‌کنیم:

$$ax+b=\circ \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

باقی‌مانده $f(-\frac{b}{a})$ است و در نتیجه:

$f(x)$ بر $ax+b$ بخش‌پذیر است، هرگاه $f(-\frac{b}{a})=\circ$ باشد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $p(x)=8x^3-4x^2+2$ بر $2x+1$ را حساب کنید.

پاسخ

چون ریشه‌ی $2x+1=\circ$ برابر $-\frac{1}{2}$ است:

$$8(-\frac{1}{2})^3-4(-\frac{1}{2})^2+2=8(-\frac{1}{8})-4(\frac{1}{4})+2=-1-1+2=\circ$$

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

باقی مانده‌های تقسیم عبارت‌های $P(x)=x^3+ax+1$ و $Q(x)=2x^2-x+1$ بر $(x+2)$ یکسان است. مقدار a را بیابید.

پاسخ

با توجه به: ($x+2=\circ \to x=-2$) باید مقادیر $P(-2)$ و $Q(-2)$ برابر باشند:

$$(-2)^3+a(-2)+1=2(-3)^2-(-2)+1 \to -8-2a+1=8+2+1 \to -2a=18 \Rightarrow a=-9$$

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر چند جمله‌ای $f(x)=x^3+ax+2$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ را حساب کنید.

پاسخ

چون ریشه‌ی $x-2=\circ$ برابر ۲ است، پس باید $f(2)=\circ$ باشد:

$$2^3+a(2)+2=\circ \Rightarrow a=-5$$

در نتیجه: $f(x)=x^3-5x+2$ بوده و باقی‌مانده‌ی آن بر $x+1$ برابر است با:

$$f(-1)=(-1)^3-5(-1)+2=6$$

---✧---

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x)=x^{۷}-۳x^{۴}+ax-۱$ بر $x-۱$، برابر ۲ و خارج‌قسمت آن $q(x)$ است. مقدار $q(-۱)$ را تعیین کنید.

پاسخ

ابتدا مقدار a را مشخص می‌کنیم:

$$(x-۱=۰ \rightarrow x=۱):\quad p(۱)=۲ \rightarrow ۱-۳+a-۱=۲ \Rightarrow a=۵$$

اکنون $p(x)$ با توجه به خارج قسمت و باقی‌مانده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^{۷}-۳x^{۴}+۵x-۱=(x-۱)q(x)+۲$$

کافی است x را برابر -۱ قرار دهیم:

$$(-۱)^{۷}-۳(-۱)^{۴}+۵(-۱)-۱=(-۱-۱)q(-۱)+۲ \rightarrow -۲q(-۱)=-۱۲ \Rightarrow q(-۱)=۶$$

اطلاع از بخش‌پذیری $P(x)$ بر یک عبارت، به یک مرحله تجزیه‌ی آن منجر می‌شود.

روشی برای تجزیه:

اگر عبارت $P(x)$ بر یک عبارت $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد، خواهیم داشت:

$$P(x)=Q(x)\cdot A(x)$$

پس $P(x)$ یک مرحله تجزیه می‌شود.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \vdots & A(x) \\ \hline ۰ & \end{array}$$

توجه کنید:

اگر عبارت‌های $Q(x)$ یا $A(x)$ قابل تجزیه باشند، با ادامه، تجزیه‌ی بهتری برای $P(x)$ به‌دست خواهد آمد.

برای نمونه؛

در عبارت $f(x)=x^{۳}-۳x-۲$ داریم: $f(۲)=۰$. بنابراین $f(x)$ بر $x-۲$ بخش‌پذیر است و با تقسیم آن بر $x-۲$ تجزیه می‌شود:

$$x^{۳}-۳x-۲=(x-۲)(x^{۲}+۲x+۱) \rightarrow x^{۳}-۳x-۲=(x-۲)(x+۱)^{۲}$$

مثال: اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $۲x^{۳}+x^{۲}+mx-۴=۰$ برابر $x=-۲$ باشد.

الف) مقدار m را بیابید.

ب) سایر جواب‌های معادله را مشخص کنید.

پاسخ

الف) جواب $x=-۲$ باید در معادله صادق باشد:

$$۲(-۲)^{۳}+(-۲)^{۲}+m(-۲)-۴=۰ \rightarrow -۱۶+۴-۲m-۴=۰ \Rightarrow m=-۸$$

ب) چون چند جمله‌ای $۲x^{۳}+x^{۲}-۸x-۴$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، با تقسیم معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x+۲)(۲x^{۲}-۳x-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ ۲x^{۲}-۳x-۲=۰ \end{cases}$$

از حل معادله‌ی دوم، سایر جواب‌ها معلوم می‌شوند:

$$۲x^۲-۳x-۲=۰ \xrightarrow{\times ۲} (۲x)^۲-۳(۲x)-۴=۰ \rightarrow (۲x-۴)(۲x+۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} ۲x-۴=۰ \Rightarrow x=۲ \\ ۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

در پایانِ این بخش، تقسیم عبارت‌های $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$ و تجزیه‌ی آن بررسی می‌شود.

به اتحادهای زیر نگاه کنید:

$$a^۲-b^۲=(a-b)(a+b) \quad \text{و} \quad a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$

واضح است که عبارت x^n-a^n همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر، یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر صفر است. (چرا؟) ضمناً با تقسیم، خارج قسمت تعیین شده و تجزیه‌ی عبارت x^n-a^n به‌دست می‌آید:

$$\boxed{x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+x^{n-۲}a+\cdots+xa^{n-۲}+a^{n-۱})}$$

برای نمونه؛

$$a^۵-b^۵=(a-b)(a^۴+a^۳b+a^۲b^۲+ab^۳+b^۴)$$
$$x^۶-۶۴=x^۶-۲^۶=(x-۲)(x^۵+۲x^۴+۴x^۳+۸x^۲+۱۶x+۳۲)$$

برخی نتایج:

- در حالت خاص وقتی $a=۱$ باشد، داریم:

$$n\in\mathbb{N} \qquad \boxed{x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\cdots+x+۱)}$$

برای نمونه؛

$$x^۵-۱=(x-۱)(x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$$ (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)

در دو حالت بعد، زوج یا فرد بودن n لازم است:

- **اگر n فرد باشد؛** و در تجزیه‌ی x^n-a^n، جمله‌ی $-a$ را جایگزین a کنیم، داریم:

$$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-۱}+x^{n-۲}(-a)+\cdots+x(-a)^{n-۲}+(-a)^{n-۱})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی x^n+a^n حاصل شده و بر $x+a$ بخش‌پذیر است:

$$\boxed{x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-x^{n-۲}a+\cdots-xa^{n-۲}+a^{n-۱})}$$

در پرانتز سمت راست تعداد جملات n تا و علامت‌ها یک در میان مثبت و منفی هستند.

برای نمونه؛

$$a^۵+b^۵=(a+b)(a^۴-a^۳b+a^۲b^۲-ab^۳+b^۴)$$

- **اگر n زوج باشد؛** و در تجزیه‌ی x^n-a^n، جمله‌ی $-a$ را جایگزین a کنیم، داریم:

$$x^n-(-a)^n=(x-(-a))(x^{n-۱}+x^{n-۲}(-a)+\cdots+x(-a)^{n-۲}+(-a)^{n-۱})$$

با ساده سازی، تجزیه‌ی x^n-a^n بر حسب عامل $x+a$ حاصل می‌شود:

$$\boxed{x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} - a^{n-1})}$$

در پرانتز سمت راست تعداد جملات n تا و علامت‌ها یک در میان مثبت و منفی هستند.

برای نمونه؛

$$a^4 - b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

جمع‌بندی:

الف) عبارت $x^n - a^n$ همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر است و بر $x+a$ فقط با شرط **زوج** بودن n بخش‌پذیر خواهد بود.

ب) عبارت $x^n + a^n$ فقط با شرط **فرد** بودن n بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

بعلاوه:

عبارت $x^n + a^n$ هیچ‌گاه بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست و بر حسب عامل $x-a$ تجزیه نمی‌شود. (چرا؟)

مثال: چند جمله‌ای $x^6 - 1$ را بر حسب عامل‌های زیر تجزیه کنید.

الف) $x-1$ ب) $x+1$

پاسخ

طبق آن‌چه در بالا گفته شد:

الف) عبارت $x^6 - 1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است و:

$$x^6 - 1 = x^6 - 1^6 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

ب) بخش‌پذیری عبارت $x^6 - 1$ بر $x+1$، با توجه به زوج بودن عدد ۶ در توان x برقرار است و:

$$x^6 - 1 = x^6 - 1^6 = (x+1)(x^5 - x^4(1) + x^3(1)^2 - x^2(1)^3 + x(1)^4 - 1^5)$$
$$= (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$$

پاسخ دهید (۵)

۱- اگر چند جمله‌ای x^2+ax-8 بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲)

۲- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۳- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x)=2x^3+ax^2-bx+2$ بر $x+2$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۲ باشد. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴)

منتخب کتاب:

۱- هر یک از چند جمله‌ای‌های زیر را بر حسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.

الف) x^6-1 با عامل $x-1$.

ب) x^6-1 با عامل $x+1$.

پ) x^5+32 با عامل $x+2$.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر x^2 برابر $x-3$ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P^2(x)$ بر x^2 را تعیین کنید.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴