۱۱

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

حسابان یازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز: (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

ساختار جدید

بهینه شده ویژه نهایی

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

حسابان (۱)

یازدهم ریاضی

۱

جبر و معادله

فهرست	صفحه

۱ مجموع جملات دنباله

در این بخش، ابتدا دنباله‌های حسابی و هندسی را یادآوری کرده و سپس روش جمع تعداد مشخصی از جملات آن‌ها را خواهیم آورد. در دنباله‌ی مقابل: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

اگر تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعد، یعنی:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots$$

همواره مقداری ثابت مانند d باشد، به آن **«دنباله‌ی حسابی»** یا دنباله‌ی عددی گفته و به عدد d **«قدر نسبت»** دنباله گفته می‌شود. برای نمونه؛

$$-3, 2, 7, 12, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

بعلاوه:

در چنین دنباله‌ای؛

- جملات دنباله بر حسب جمله‌ی اول a (همان a_1) و قدر نسبت d قابل بیان هستند:

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

در نتیجه:

جمله‌ی nاُم (یا: جمله‌ی عمومی) دنباله‌ی حسابی بر حسب جمله‌ی اول و قدر نسبت عبارت است از:

$$\boxed{a_n = a + (n-1)d}$$

برای نمونه؛

در دنباله‌ی $-3, 2, 7, 12, \dots$ جمله‌ی عمومی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_n = -3 + (n-1)(5) \Rightarrow a_n = 5n - 8$$

- شرط آن‌که سه عدد a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، این است که:

$$b - a = c - b \Rightarrow \boxed{2b = a + c}$$

در این صورت، b را **واسطه** (میانگین) حسابی بین a و c گویند.

- اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی عددی معلوم باشند، آنگاه:

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_m}{n - m}}$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی زیر، تعداد جملات را مشخص کنید.

$$102, 109, 116, \dots, 200$$

پاسخ

توسط فرمول جمله‌ی عمومی برای $a = 102$، $a_n = 200$ و $d = 109 - 102 = 7$ می‌نویسیم:

$$a_n = a+(n-1)d \ \rightarrow \ 200 = 102+(n-1)\times 7 \ \rightarrow \ 200-102+7 = 7n$$
$$\rightarrow \ 7n = 105 \ \Rightarrow \ n = 15$$

روش جمع تعدادی از جملات یک دنباله‌ی حسابی را با آوردن نمونه‌ای آموزش می‌دهیم.

مثال: مجموع عبارت زیر را حساب کنید:

$$1+2+3+\cdots+99+100$$

پاسخ

مجموع را S گرفته و آن را یک‌بار هم از آخر به اول می‌نویسیم:

$$S = 1+2+\cdots+99+100$$
$$S = 100+99+\cdots+2+1$$

اکنون اعداد دو طرف تساوی را به همان ترتیبی که زیر هم قرار گرفته‌اند، با هم جمع می‌کنیم:

$$2S = (\underbrace{1+100}_{101})+(\underbrace{2+99}_{101})+\cdots+(\underbrace{99+2}_{101})+(\underbrace{100+1}_{101})$$

چون تعداد پرانتزها ۱۰۰ تا است، در نتیجه:

$$2S = 100\times 101 \ \Rightarrow \ S = \frac{100\times 101}{2}$$

توجه:

تعمیم مثال قبل را در ذهن داشته باشید:

$$\boxed{1+2+3+\cdots+n = \frac{n\times(n+1)}{2}}$$

جمع جملات متوالی دنباله‌ی حسابی، طبق ایده‌ی مثال قبل و به سادگی محاسبه می‌شود:

مجموع حسابی:

مجموع n جمله‌ی اول دنباله حسابی بر حسب جمله‌ی اول a، قدرنسبت d و تعداد جملات n از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

توجه کنید:

جمع بالا باید از جمله‌ی اول a شروع شده و تا جمله‌ی nام یعنی a_n ادامه داشته باشد:

$$\boxed{S_n = a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

دلیل:

مشابه مثال قبل، مجموع را به دو صورت زیر هم می‌نویسیم:

$$S_n = a + \underbrace{a+d}_{a_2} + \cdots + \underbrace{a+(n-2)d}_{a_{n-1}} + \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

$$S_n = \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n} + \underbrace{a+(n-2)d}_{a_{n-1}} + \cdots + \underbrace{a+d}_{a_2} + a$$

جملات دو طرف تساوی را همان‌طور که زیر هم قرار دارند، با هم جمع می‌کنیم:

$$2S_n = \underbrace{2a+(n-1)d} + \underbrace{2a+(n-1)d} + \cdots + \underbrace{2a+(n-1)d} + \underbrace{2a+(n-1)d}$$

چون تعداد جملات یکسان و به شکل $2a+(n-1)d$ برابر n تا است، در نتیجه:

$$2S_n = n\times[2a+(n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n\times[2a+(n-1)d]}{2}$$

برای نمونه؛

مجموع عددهای دو رقمی مضرب ۶، یعنی: $12+18+\cdots+96$ را حساب می‌کنیم: (سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)

ابتدا تعیین تعداد جملات که مورد نیاز است:

$$\xrightarrow{a=12,\ d=6} 96 = 12+(n-1)\times 6 \xrightarrow{\div 6} 16 = 2+n-1 \Rightarrow n = 15$$

بنابراین جواب: $S_{15} = \dfrac{15\times[\overbrace{2(12)+(15-1)\times 6}^{24+84=108}]}{2} = 15\times 54 = 810$ است.

مثال: در دنباله‌ی حسابی $-1, 3, 7, \ldots$:

الف) مجموع دوازده جمله‌ی اول را حساب کنید.

ب) مجموع S_n را بر حسب n بیان کنید.

پاسخ

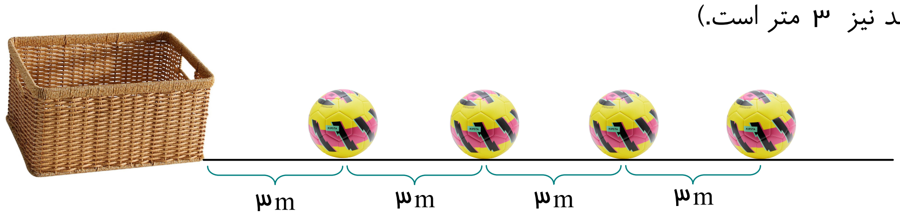
الف) برای $a=-1$ و $d = 3-(-1) = 4$ داریم:

$$S_{12} = \frac{12\times[2(-1)+(12-1)\times 4]}{2} = 6(-2+44) = 252$$

ب) مشابه قسمت قبل:

$$S_n = \frac{n\times[\overbrace{2(-1)+(n-1)\times 4}^{=4n-6}]}{2} = \frac{n\times 2(2n-3)}{2} = n(2n-3)$$

مثال: (از کتاب) در یک مسابقه تعداد زیادی توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. (فاصله‌ی توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است.)



دونده‌ای باید از کنار سبد شروع به دویدن کرده، توپ اول را برداشته، آن را تا سبد بُرده و داخل سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی رفته، آن را نیز برداشته، مانند قبل داخل سبد انداخته و این کار را ادامه دهد. اگر دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید او جمعاً چند توپ داخل سبد انداخته است؟

پاسخ

دونده برای انتقال توپ اول $۶ = ۳ + ۳$ متر می‌دود. به همین ترتیب، برای توپ دوم ۱۲ متر، توپ سوم ۱۸ متر و ... خواهد دوید. پس باید مجموع n جمله (= تعداد توپ‌ها) از دنباله‌ی زیر برابر ۹۱۸ شود:

$$۶,۱۲,۱۸,\ldots$$

یعنی:

$$S_n=۹۱۸ \xrightarrow{a=d=۶} \frac{n[۲(۶)+(n-۱)\times ۶]}{۲}=۹۱۸ \to \underbrace{n(۶n+۶)}_{۶n(n+۱)}=۲\times ۹۱۸$$

$$\to n(n+۱)=\frac{۲\times ۹۱۸}{۶}=۲\times ۱۵۳=۳۰۶$$

با قدری آزمون و خطا می‌بینید که $۳۰۶=۱۷\times ۱۸$ بوده و بنابراین $n=۱۷$ است.

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

در دنباله‌ی حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟

پاسخ

کمترین n با شرط $S_n>۴۰۰$ را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{n\overbrace{[۲(۴)+(n-۱)\times ۸]}^{۸(۱+n-۱)}}{۲}>۴۰۰ \to ۴n^۲>۴۰۰ \Rightarrow n>\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

پس $\min n=۱۱$ جواب است.

---✧---

مثال: در دنباله‌ی حسابی $-۱,۳,۷,\ldots$، مجموع ده جمله‌ی دوم را بیابید.

پاسخ

ده جمله‌ی دوم یعنی جملات یازدهم تا بیستم:

$$a_{۱۱}+a_{۱۲}+\cdots+a_{۲۰}=(a_۱+a_۲+\cdots+a_{۲۰})-(a_۱+a_۲+\cdots+a_{۱۰})=S_{۲۰}-S_{۱۰}$$

پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$S_{۲۰}-S_{۱۰}=\frac{۲۰\times[۲(-۱)+۱۹\times ۴]}{۲}-\frac{۱۰\times[۲(-۱)+۹\times ۴]}{۲}$$

$$=۱۰(-۲+۷۶)-۵(-۲+۳۶)=۷۴۰-۱۷۰=۵۷۰$$

---✧---

مثال: در جملات دو دنباله‌ی حسابی $۵,۸,۱۱,\ldots$ و $۲,۶,۱۰,\ldots$، تعدادی عدد دو رقمی مشترک وجود دارد. مجموع این اعداد را حساب کنید.

پاسخ

چند جمله از هر دنباله را نوشته تا عددهای مشترک مشخص گردند:

$$۵,۸,۱۱,۱۴,۱۷,۲۰,۲۳,۲۶,... \quad و \quad ۲,۶,۱۰,۱۴,۱۸,۲۲,۲۶,...$$

عددهای $۱۴,۲۶,...$ مشترک بوده که یک دنباله حسابی با $a=۱۴$ و $d=۱۲$ تشکیل می‌دهند. در این دنباله $a_n=۱۴+(n-۱)\times۱۲$ و یا $a_n=۱۲n+۲$ است. برای تعیین تعداد جملات دو رقمی می‌نویسیم:

$$۱۲n+۲<۱۰۰ \to ۱۲n<۹۸ \to n<\frac{۹۸}{۱۲}\cong ۸/۲$$

پس تعداد جملات ۸ تا بوده و مجموع آن‌ها برابر است با:

$$S_۸=\frac{۸}{۲}[۲\times۱۴+(۸-۱)\times۱۲]=۴(۲۸+۸۴)=۴۴۸$$

---✧---

روش دوم:

محاسبه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، وقتی قدر نسبت نامعلوم، ولی جمله‌ی آخر مشخص است، از رابطه‌ی زیر آسان‌تر قابل محاسبه است:

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_۱+a_n)}{۲}}$$

دلیل:

$$S_n=\frac{n\times[۲a+(n-۱)d]}{۲}=\frac{n\times[a+\overbrace{a+(n-۱)d}^{=a_n}]}{۲}=\frac{n(a+a_n)}{۲}$$

مثال: (مشابه کتاب)

مجموع همه‌ی عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را به‌دست آورید.

پاسخ

جمله‌ی اول $a=۱۴$ است. با بررسی عددهای ۱۰۰، ۹۹ و ...، به آسانی در می‌یابید که جمله‌ی آخر $a_n=۹۸$ است:

$$۱۴,۲۱,۲۸,...,۹۸$$

با قدرنسبت $d=۷$، طبق فرمول جمله‌ی عمومی:

$$a_n=a+(n-۱)d \to n=\frac{a_n-a_۱}{d}+۱=\frac{۹۸-۱۴}{۷}+۱=۱۲+۱=۱۳$$

در نتیجه:

$$S_{۱۳}=\frac{۱۳(۱۴+۹۸)}{۲}=۱۳\times۵۶=۷۲۸$$

---✧---

توجه!

فرمول S_n اطلاعات کاملی از دنباله در خود دارد. برای نمونه، ببینید:

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n=n(۲n+۱)$ داده شده است. جملات اول، دوم و قدرنسبت را مشخص کرده و توسط آن‌ها جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنید.

پاسخ

چون $a_{1}=S_{1}$ است، پس: $a_{1}=۳$ $\to$ $a_{1}=۱\times(۲\times۱+۱)$. همچنین:

$$S_{۲}=a_{1}+a_{۲}\to ۲\times(۲\times۲+۱)=۳+a_{۲}\to a_{۲}=۷$$

در نتیجه:

$d=a_{۲}-a_{1}=۷-۳=۴$ است. پس جمله‌ی عمومی به صورت زیر است:

$$a_{n}=۳+(n-۱)\times۴=۳+۴n-۴\Rightarrow a_{n}=۴n-۱$$

روش فوری:

اگر فرمول مجموع جملات معلوم باشد، در هر دنباله‌ای می‌توان جمله‌ی عمومی را یک‌باره نیز مشخص کرد:

$$\boxed{a_{n}=S_{n}-S_{n-1}}$$

البته همواره $a_{1}=S_{1}$ است.

برای نمونه؛ پاسخ مثال قبل به روش فوری:

$$a_{n}=n(۲n+۱)-\underbrace{(n-۱)(۲(n-۱)+۱)}_{(n-۱)(۲n-۱)}=(۲n^{۲}+n)-(۲n^{۲}-۳n+۱)\Rightarrow a_{n}=۴n-۱$$

اکنون به یادآوری نوع دوم دنباله‌های خاص و برخی ویژگی‌های آن توجه کنید.

در دنباله‌ی روبه‌رو: $a_{۱},a_{۲},a_{۳},\dots,a_{n},\dots$

اگر نسبت هر جمله به جمله‌ی قبل مقدار ثابتی چون q باشد، به آن «**دنباله‌ی هندسی**» گفته و به q قدر نسبت گفته می‌شود. برای نمونه؛

$$۳,\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\dots\Rightarrow\begin{cases}a=۳\\ \dfrac{\frac{۳}{۲}}{۳}=\dfrac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۳}{۲}}=\dots=\dfrac{۱}{۲}\to q=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$$

به عبارت دیگر:

هر جمله در قدر نسبت q ضرب می‌شود تا جمله‌ی بعدی به‌دست آید.

می‌بینید در دنباله‌ی بالا:

$$۳\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\ ,\ \frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۴}\ ,\ \dots$$

بعلاوه:

در چنین دنباله‌ای؛

- جملات دنباله بر حسب جمله‌ی اول a و قدر نسبت q قابل بیان هستند:

$$a\ ,\ aq\ ,\ aq^{۲}\ ,\ aq^{۳}\ ,\ \dots$$

در کل،

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی چنین است:

$$\boxed{a_n = aq^{n-1}}$$

- قدر نسبت از تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی به‌دست می‌آید:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots$$

یک نتیجه:

اگر سه عدد a,b,c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، لازم است که:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \times c}$$

در این صورت، b را واسطه (میانگین) هندسی بین a و c گویند.

- اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$\boxed{q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}}$$

در ادامه، روش محاسبه‌ی مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی را خواهیم دید.

مثال: مجموع عددهای زیر از یک دنباله‌ی هندسی را حساب کنید:

$$1, 3, 9, 27, \ldots, 729$$

پاسخ

قرار می‌دهیم: $S = 1 + 3 + 9 + \cdots + 729$ و عبارت حاصل را در $q = 3$ ضرب می‌کنیم تا عبارتی مشابه حاصل شود:

$$3S = 3 + 9 + 27 + \cdots + 729 + 2187$$

دو طرف تساوی را از هم کم کرده و جملات یکسان را حذف می‌کنیم:

$$3S - S = (3 + 9 + 27 + \cdots + 729 + 2187) - (1 + 3 + 9 + \cdots + 729)$$

$$\rightarrow 2S = 2187 - 1 \Rightarrow S = \frac{2186}{2} = 1093$$

با کاربرد روش حل مثال قبل، می‌توان فرمول‌های کلی زیر را به‌دست آورد:

مجموع هندسی:

مجموع n جمله‌ی اول یک «دنباله‌ی هندسی» از روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \left(\text{یا: } S_n = \frac{a - a_n q}{1-q}\right)$$

توجه کنید:

هرگاه تعداد جملات معلوم باشد از رابطه‌ی سمت راست و اگر جمله‌ی آخر معلوم باشد، بهتر است از رابطه‌ی سمت چپ استفاده شود.

مثال: مجموع یازده جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی زیر را حساب کنید:

$$۳\,,\,۶\,,\,۱۸\,,\,\ldots$$

پاسخ

$a=۳$ و $q=۲$ هستند. طبق دستور بالا برای $n=۱۱$ داریم:

$$S_{۱۱}=۳\times\frac{۱-۲^{۱۱}}{۱-۲}=۳\times\frac{۱-۲۰۴۸}{-۱}=۳\times ۲۰۴۷=۶۱۴۱$$

مثال: مجموع دوازده جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی صعودی ۹ برابر مجموع شش جمله‌ی اول آن است. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید. (صعودی = افزایشی)

پاسخ

باید $S_{۱۲}=۹S_{۶}$ باشد. پس:

$$a\times\frac{۱-q^{۱۲}}{۱-q}=۹\times a\times\frac{۱-q^{۶}}{۱-q}\xrightarrow[\div a]{\times(۱-q)}۱-q^{۱۲}=۹(۱-q^{۶})$$

استفاده‌ی مناسب از اتحاد مزدوج:

$$(۱-q^{۶})(۱+q^{۶})=۹(۱-q^{۶})\;\to\;۱+q^{۶}=۹\;\to\;q^{۶}=۸\xrightarrow{q^{۶}=(q^{۲})^{۳}}q^{۲}=۲\;\Rightarrow\;q=\pm\sqrt{۲}$$

(چون دنباله صعودی است، فقط $q=\sqrt{۲}$ پذیرفته می‌شود.)

مثال: (از کتاب) تصور کنید در خانه‌ی اول شطرنج یک دانه‌ی گندم، در خانه‌ی دوم دو دانه‌ی گندم و به همین صورت، در هر خانه، دو برابر خانه‌ی قبلی گندم قرار دهیم. اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) کل گندم‌های صفحه‌ی شطرنج چند گرم می‌شود؟

ب) نشان دهید کل گندم‌ها بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد. (**توجه:** صفحه‌ی شطرنج $۸\times۸=۶۴$ خانه دارد!)

پاسخ

الف) تعداد کل دانه‌های گندم:

$$۱+۲+۲^{۲}+\cdots+۲^{۶۳}\xrightarrow{q=۲,\ n=۶۴}S_{۶۴}=۱\times\frac{۱-۲^{۶۴}}{۱-۲}=۲^{۶۴}-۱$$

پس در کل $۲^{۶۴}-۱$ گرم گندم خواهیم داشت.

ب) در نظر بگیرید: $۲^{۱۰}=۱۰۲۴\cong۱۰۰۰=۱۰^{۳}$. در این صورت وزن کل گندم‌ها عبارت است از:

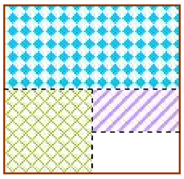
$$۲^{۶۴}-۱\cong(۲^{۱۰})^{۶}\times۲^{۴}\cong(۱۰^{۳})^{۶}\times\underbrace{۱۶}_{۱/۶\times۱۰}=۱/۶\times۱۰^{۱۹}\quad\text{(گرم)}$$

چون هر تن $۱۰^{۳}\times۱۰^{۳}=۱۰^{۶}$ گرم است، مقدار گندم‌ها بر حسب تن: $\frac{۱/۶\times۱۰^{۱۹}}{۱۰^{۶}}=۱/۶\times۱۰^{۱۳}$ است. می‌توان نوشت:

$$۱/۶\times۱۰^{۱۳}=۱/۶\times۱۰^{۴}\times۱۰^{۹}=۱۶۰۰۰\times۱۰^{۹}\qquad\text{(شانزده هزار میلیارد تن)}$$

مثال: طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب، در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده رنگ می‌شود. پس از دست کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

پاسخ



سه مرحله از رنگ آمیزی در شکل مقابل دیده می‌شود:

- مساحت قسمت رنگ شده در مرحله‌ی اول: $۱\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$
- مساحت رنگ شده بعد از مرحله‌ی دوم: $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}$
- با ادامه‌ی این روند، مساحت رنگ شده تا مرحله‌ی n ام برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}$$

مساحت مربع $۱\times۱=۱$ است و باید در دنباله‌ی هندسی با $a=\frac{۱}{۲}$ و $q=\frac{۱}{۲}$ داشته باشیم:

$$S_n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}\times۱ \rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱-(\frac{۱}{۲})^n}{۱-\frac{۱}{۲}}\geq\frac{۹۹}{۱۰۰} \rightarrow ۱-(\frac{۱}{۲})^n\geq\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۲^n}\leq ۱-\frac{۹۹}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰} \rightarrow ۲^n\geq ۱۰۰ \Rightarrow n\geq ۷$$

پس لااقل لازم است هفت مرحله رنگ آمیزی انجام شود.

روش کوتاه: (تکلیف)

کافی بود که مساحت باقی‌مانده را کمتر یا مساوی $۱-۰/۹۹=۰/۰۱$ قرار می‌دادیم.

پاسخ دهید (۱)

۱- مجموع تمام عددهای فرد دو رقمی را حساب کنید.

۲- روی محیط یک دایره ۱۵ نقطه‌ی متمایز قرار داده‌ایم. تعداد کل وترهای حاصل از اتصال دو به دوی این نقاط را به دو روش حساب کنید:

الف) مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

ب) روش ترکیبیاتی از پایه‌ی دهم

۳- a عددی غیر صفر است؛ در دنباله‌ی ثابت $a,a,a,\ldots,a$ با تعداد n جمله:

الف) آیا این دنباله حسابی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، قدر نسبت و سپس مجموع جملات را حساب کنید.

ب) آیا این دنباله هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، قدر نسبت و سپس مجموع جملات را حساب کنید.

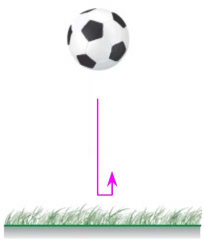
۴- در دنباله‌ی حسابی $۵,۸,۱۱,\dots$، لااقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۲۲۰ بیشتر شود؟

۵- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دوازده جمله‌ی اول ۱۳۸ و جمله‌ی ششم برابر ۱۰ است. جمله‌ی اول آن را مشخص کنید.

۶- مجموع اعداد سه رقمی مضرب ۸ را حساب کنید.

۷- مجموع نُه جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۳},۱,\dots$ را حساب کنید.

۸- توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی یک سوم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع هشت متری برسد؛ این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟



۹- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. نسبت جمله‌ی اول به جمله‌ی پنجم را به‌دست آورید.

۱۰- حاصل عبارت $\frac{t^{۱۱}+t^{۱۰}+t^{۹}+\dots+t+۱}{t^{۹}+t^{۶}+t^{۳}+۱}$ را به ازای $t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ حساب کنید.

منتخب کتاب:

۱- در دنباله‌ی حسابی روبه‌رو: $۵,۸,۱۱,\dots$

حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۲- در بیست جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ است. جمله اول و قدر نسبت آن را مشخص کنید.

۳- جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n=۲^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۲۵۵ شود؟

۴- برای عدد حقیقی a با شرط $a\neq ۱$ و عدد طبیعی n حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$۱+a+a^{۲}+\dots+a^{n-۱}$$

با استفاده از جواب خود، تجزیه‌های زیر را نتیجه بگیرید:

$$a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\dots+a^{۲}+a+۱)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+a^{۲}b^{n-۳}+ab^{n-۲}+b^{n-۱})$$

چالش (ویژه علاقمندان)

مجموع $99\ldots98+\cdots+998+98+8$ را بر حسب n محاسبه کنید. **(عدد سمت راست n رقم دارد.)**

۲ معادله درجه دوم

در این بخش، بررسی بیشتری مرتبط با جواب‌های معادله‌ی درجه دوم انجام خواهد شد. ابتدا، یادآوری چند روش سریع حل و همچنین روش کلی حل این نوع معادلات:

مثال: معادلات زیر را طبق قاعده‌ی: ($x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$) حل کنید.

الف) $(2x+1)^2 - 9 = 0$ ب) $x^2 - 4x + 4 = 1$

پاسخ

الف)

$$(2x+1)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+1=-3 \rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

ب) سمت چپ معادله به صورت اتحاد مربع دوجمله‌ای است و در نتیجه می‌توان مانند قسمت قبل عمل کرد:

$$(x-2)^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x-2=1 \rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

مثال: طبق روش سریع:

$$\boxed{P \times Q = 0 \Rightarrow P=0 \quad \text{یا} \quad Q=0}$$

و تجزیه‌ی چند جمله‌ای ها، هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 3x = 0$ ب) $x^2 - x = 6$ پ) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

پاسخ

الف) با فاکتورگیری تجزیه انجام می‌شود:

$$x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

ب) معادله را مرتب کرده و تجزیه طبق اتحاد جمله مشترک:

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (x+2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

پ) چون x^2 دارای ضریب است، باید ضریب را به مجذور تبدیل کرده و سپس طبق اتحاد جمله مشترک عمل کنیم:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} 9x^2 + 12x + 3 = 0 \rightarrow (3x)^2 + 4(3x) + 3 = 0$$

$$\rightarrow (3x+3)(3x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} 3x+3=0 \rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1 \\ 3x+1=0 \rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

یادآوری روش کلی حل معادلات درجه‌ی دوم:

روش دلتا:

معادله‌ی درجه دوم پس از ساده شدن به شکل $ax^2+bx+c=0$ است و اعداد $a\neq 0$، b و c **ضرایب معادله** هستند. در این معادله، جواب‌ها بر حسب مقدار $\Delta=b^2-4ac$ تعیین می‌شوند:

- اگر $\Delta>0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(معمولاً ریشه‌ها را α و β نام‌گذاری می‌کنیم.)

- اگر $\Delta=0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مضاعف** (برابر) دارد که عبارتند از:

$$\alpha=\beta=-\frac{b}{2a}$$

- اگر $\Delta<0$ باشد، معادله **هیچ جوابی** (حقیقی) ندارد.

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $4x^2-x-1=0$ ب) $3x^2-x=-6$

پاسخ

الف) در این معادله $a=4$، $b=-1$ و $c=-1$ بوده و در نتیجه:

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(4)(-1)=17$$

چون دلتا مثبت است، برای معادله دو جواب متمایز حاصل می‌شود:

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{17}}{2(4)}=\frac{1+\sqrt{17}}{8} \quad \text{و} \quad \beta=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{17}}{2(4)}=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$$

ب) معادله را به صورت $3x^2-x+6=0$ مرتب کرده و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(3)(6)=1-72=-71$$

چون Δ منفی است، معادله هیچ جوابی ندارد.

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $(2-t)x^2-x=3$:

الف) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد. ب) جواب حقیقی نداشته باشد.

پاسخ

معادله را به صورت استاندارد $(2-t)x^2-x-3=0$ می‌نویسیم تا $a=2-t$، $b=-1$ و $c=-3$ مشخص شوند. اکنون:

الف) باید شرط $\Delta=0$ برقرار شود:

$$\Delta=(-1)^2-4(2-t)(-3)=1+12(2-t)=25-12t=0 \quad\rightarrow\quad 12t=25$$

$$\Rightarrow \quad t=\frac{25}{12}$$

ب) در این حالت لازم است دلتا منفی باشد:

$$۲۵-۱۲t<۰ \rightarrow -۱۲t<-۲۵ \Rightarrow t>\frac{-۲۵}{-۱۲}=\frac{۲۵}{۱۲}$$

---✨---

حالت‌هایی خاص: (مهم)

در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$، به سه مورد زیر توجه داشته باشید:

- اگر a و c مختلف العلامت باشند (یعنی: $ac<۰$)، آنگاه:

خود به خود دلتا مثبت بوده و معادله دو جواب متمایز خواهد داشت.

- اگر جمع ضرایب برابر صفر شود: (یعنی: $a+b+c=۰$)، آنگاه:

یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

- اگر $a-b+c=۰$ (یا: $b=a+c$) باشد، آنگاه:

یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای نمونه؛

در معادله‌ی $۳x^۲+۴x+۱=۰$، شرط $b=a+c$ برقرار است. پس جواب‌ها فوری: -۱ و $-\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۳}$ به‌دست خواهند آمد.

مثال: طول و عرض مستطیلی به ترتیب $۷x+۱$ و $x+۳$ است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ واحد مربع باشد، مقدار x را بیابید.

پاسخ

مساحت مستطیل را برابر ۳۲ قرار می‌دهیم:

$$(x+۳)(۷x+۱)=۳۲ \rightarrow ۷x^۲+x+۲۱x+۳=۳۲ \Rightarrow ۷x^۲+۲۲x-۲۹=۰$$

می‌بینید که جمع ضرایب صفر است و در نتیجه جواب‌ها به روش سریع معلوم می‌شوند:

$$x_۱=۱ \quad و \quad x_۲=\frac{c}{a}=-\frac{۲۹}{۷}$$

چون طول ضلع نمی‌تواند منفی باشد، فقط $x=۱$ قابل قبول است.

---✨---

یک قاعده‌ی کلی:

در معادله‌ی چند جمله‌ای با هر درجه‌ای:

اگر مجموع ضرایب صفر شود، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ است.

این مطلب بدیهی، در تجزیه عبارات درجه‌ی سوم و حل معادلات بسیار مفید است.

نمونه:

مثال: معادله‌ی $x^۳-۳x^۲-۲x=-۴$ را به روش تجزیه کردن حل کنید.

پاسخ

معادله به صورت $x^3-3x^2-2x+4=0$ مرتب می‌شود؛ چون مجموع ضرایب صفر است، یکی از ریشه‌ها $x=1$ است.

در نتیجه:

یکی از عامل‌های تجزیه‌ی عبارت سمت چپ $(x-1)$ است.

با تقسیم x^3-3x^2-2x+4 بر $(x-1)$ تجزیه‌ی آن را خواهیم داشت:

$$x^3-3x^2-2x+4=(x-1)(x^2-2x-4)$$

در ادامه:

سایر ریشه‌ها از حل معادله‌ی $x^2-2x-4=0$ به روش دلتا حاصل می‌شوند:

$$x^2-2x-4=0 \xrightarrow{\Delta=20} \begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{20}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{5}}{2}=1+\sqrt{5} \\ x=\dfrac{2-\sqrt{20}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{5}}{2}=1-\sqrt{5} \end{cases}$$

---✲---

تذکر مهم:

اطلاع از تمام ریشه‌ها، به تجزیه‌ی کامل چند جمله‌ای هم منجر می‌شود:

$$x^3-3x^2-2x+4=(x-1)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

مثال: (از کتاب) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+kx^2-x-2$ برابر -2 باشد. سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید. (**توجه:** طبق تعریف، هر جواب معادله‌ی $f(x)=0$ یک صفر تابع محسوب می‌شود.)

پاسخ

باید $f(-2)=0$ باشد:

$$-8+4k+2-2=0 \Rightarrow k=2$$

پس $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ بوده و بر $(x+2)$ بخش‌پذیر است. بقیه حل کاملاً مانند مثال قبل انجام می‌شود.

---✲---

توجه کنید:

برخی معادلات که حتی ممکن است درجه دوم نباشند، ظاهری شبیه معادلات درجه دوم دارند. این معادلات معمولاً با تغییر کوچکی تبدیل به درجه دوم شده و به آسانی حل می‌شوند. به چند نمونه توجه کنید:

مثال: در معادله‌ی $(2x-1)^2+2(2x-1)-3=0$ جواب‌ها را مشخص کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $2x-1=t$. با جایگزینی در معادله، باید جواب‌های $t^2+2t-3=0$ را مشخص کنیم. روش تجزیه:

$$(t+3)(t-1)=0 \Rightarrow t=-3\ ,\ t=1$$

اکنون با جایگزینی در رابطه‌ی $2x-1=t$، جواب‌های x به‌دست خواهند آمد:

- $t=1:\ 2x-1=1 \to 2x=2 \Rightarrow x=1$
- $t=-3:\ 2x-1=-3 \to 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

(به روش به‌کار رفته در حل این مثال، روش «تغییر متغیر» گفته می‌شود.)

مثال: معادله‌ی $(x^2-1)^2+(x^2-1)=6$ را با روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $x^2-1=t$ و در نتیجه معادله به صورت $t^2+t-6=0$ تبدیل می‌شود. طبق روش تجزیه کردن می‌نویسیم:

$$(t+3)(t-2)=0 \Rightarrow t=-3\ ,\ t=2$$

طبق تغییر متغیر به‌کار رفته:

- $t=2:\ \ x^2-1=2 \rightarrow x^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3}\ ,\ x=-\sqrt{3}$
- $t=-3:\ \ x^2-1=-3 \rightarrow x^2=-2$ غیر ممکن و جواب ندارد!

پس معادله فقط دو جواب $\pm\sqrt{3}$ دارد.

در ادامه، ارتباط بین جواب‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم را خواهیم دید.

تذکر:

هر وقت در مورد دو ریشه‌ی یک معادله‌ی درجه دوم بحث می‌شود، باید:

از منفی نبودن Δ مطمئن باشید و در صورت لزوم، آن را چک کنید.

روابط بین ریشه‌ها:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، آنگاه:

- **مجموع ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$
- **حاصل‌ضرب ریشه‌ها:** برابر است با: $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که از تساوی $|\alpha-\beta|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست می‌آید.

دلیل:

کافی است جواب‌های $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ را با هم جمع یا در هم ضرب کنید.

نمونه‌ها:

الف) این ادعا که در معادله‌ی $4x^2-3x-7=0$ مجموع ریشه‌ها: $-\dfrac{3}{4}$ است، نادرست می‌باشد. زیرا:

(سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳) $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-3}{4}=\dfrac{3}{4}$

ب) در معادله‌ی $۲x^۲-۵x-۷=۰$ که ریشه‌ها: -۱ و $۳/۵=\frac{۷}{۲}=-\frac{c}{a}$ هستند، می‌بینید جمع ریشه‌ها $۲/۵$ و ضربشان $-۳/۵$ است. از طرفی:

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-۵}{۲}=۲/۵ \quad و \quad \alpha\beta=\frac{c}{a}=\frac{-۷}{۲}=-۳/۵$$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $-۳x^۲+x+۲=۰$ باشند:

الف) مقادیر $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ را حساب کنید.

ب) حاصل $۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲$ را به‌دست آورید.

پ) مقدار $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}$ را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) طبق فرمول‌های بالا:

$$s=-\frac{b}{a} \Rightarrow s=-\frac{۱}{-۳}=\frac{۱}{۳} \quad و \quad p=\frac{c}{a} \Rightarrow p=\frac{۲}{-۳}=-\frac{۲}{۳}$$

ب) باید عبارت $۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲$ را بر حسب $s=\alpha+\beta$ و $p=\alpha\beta$ تبدیل کرده و سپس مقادیر قسمت قبل را جایگزین سازیم:

$$۳\alpha^۲\beta+۳\alpha\beta^۲=۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=۳ps \Rightarrow ۳(-\frac{۲}{۳})(\frac{۱}{۳})=-\frac{۲}{۳}$$

پ) مشابه قسمت قبل:

$$\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{s}{p} \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۳}}{-\frac{۲}{۳}}=-\frac{۳}{۶}=-\frac{۱}{۲}$$

مثال: به ازای چه مقداری از m در معادله‌ی $x^۲-mx+۸=۰$، یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

پاسخ

شرط داده شده را به صورت $\beta=\alpha^۲$ در نظر گرفته و چون ضرب ریشه‌ها برابر $۸=\frac{۸}{۱}=\frac{c}{a}$ معلوم است، آن را به‌کار می‌بریم:

$$\alpha\beta=\frac{c}{a} \to \alpha\alpha^۲=۸ \to \alpha^۳=۸ \to \alpha=۲$$

پس یکی از ریشه‌های معادله عدد ۲ بوده و می‌توانیم آن را در معادله جایگزین x سازیم:

$$۲^۲-m\times ۲+۸=۰ \to ۲m=۱۲ \Rightarrow m=۶$$

عبارات خاص:

با داشتن مقادیر: $\alpha+\beta=s$ و $\alpha\beta=p$، بعضی عبارت‌های خاص بر حسب s و p به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- **جمع مجذورات:**

$$\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=s^۲-۲p$$

- **جمع معکوس‌ها:**

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}$$

- **جمع معکوس مجذورات:**

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{s^2-2p}{p^2}$$

- **جمع مکعبات:**

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=s^3-3ps$$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-5x+1=0$ باشند، مقادیر $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ و $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}$ را حساب کنید.

پاسخ

دو مقدار مورد نیاز را حساب می‌کنیم:

$$p=\alpha\beta=\frac{c}{a}=1 \quad \text{و} \quad s=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=5$$

واضح است که: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{s}{p}=\frac{5}{1}=5$ است. در عبارت دوم، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}=\frac{\alpha(\alpha+1)+\beta(\beta+1)}{(\beta+1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta}{\alpha\beta+\beta+\alpha+1}=\frac{s^2-2p+s}{p+s+1}$$

$$=\frac{25-2+5}{1+5+1}=\frac{28}{7}=4$$

مثال: مقدار m را طوری حساب کنید که مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله‌ی $2x^2-mx+m-1=0$ برابر ۴ باشد.

پاسخ

با توجه به شرط داده شده: $\alpha^2+\beta^2=s^2-2p=4$ است. چون:

$$p=\frac{c}{a}=\frac{m-1}{2} \quad \text{و} \quad s=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{2}=\frac{m}{2}$$

است، باید داشته باشیم:

$$(\frac{m}{2})^2-2(\frac{m-1}{2})=4 \to \frac{m^2}{4}-m+1=4$$

$$\xrightarrow{\times 4} m^2-4m-12=0 \Rightarrow m=-2\ ,\ m=6$$

توجه کنید:

معادله برای $m=6$ دارای دلتای منفی است و در نتیجه فقط $m=-2$ قابل قبول خواهد بود.

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، حاصل $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ را حساب کنید.

پاسخ

توان دوم عبارت $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ را با توجه به خاصیت $|a|^2=a^2$ و استفاده از اتحاد اول تعیین کرده و در پایان از آن جذر می‌گیریم:

$$|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|^2=(\sqrt{x'}-\sqrt{x''})^2=x'+x''-2\sqrt{x'x''}=4-2\sqrt{1}=2$$

در نتیجه $|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\sqrt{2}$ است.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2-4x+1=0$ باشند، مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $(\alpha^2-4\alpha+5)(\beta^2-4\beta+3)$ ب) $\beta(\alpha^3-4\alpha^2)+\alpha(2\beta^3-8\beta^2)$

پاسخ

الف) داریم: $s=-\frac{b}{a}=4$ و $p=\frac{c}{a}=1$. چون α و β جواب‌های معادله هستند، باید در معادله صدق کنند:

$$\alpha^2-4\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha=-1 \quad \text{و} \quad \beta^2-4\beta+1=0 \Rightarrow \beta^2-4\beta=-1$$

در نتیجه:

$$(\alpha^2-4\alpha+5)(\beta^2-4\beta+3)=(-1+5)(-1+3)=4\times 2=8$$

ب) مشابه قسمت قبل:

$$\alpha^2-4\alpha=-1 \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^3-4\alpha^2=-\alpha$$

با عملکرد مشابه، $2\beta^3-8\beta^2=-2\beta$ خواهد شد. جایگذاری در عبارت داده شده:

$$\beta(-\alpha)+\alpha(-2\beta)=-3\alpha\beta=-3p=-3$$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم را در ادامه خواهیم دید.

مثال: (از کتاب) اگر α و β ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم باشند، آن معادله را مشخص کنید.

پاسخ

باید $x-\alpha$ و $x-\beta$ عامل‌های معادله باشند. در نتیجه:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0 \rightarrow x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta=0 \Rightarrow x^2-\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=s}x+\underbrace{\alpha\beta}_{=p}=0$$

طبق مثال قبل، با داشتن ریشه‌ها یا حتی فقط با داشتن جمع و ضرب آن‌ها، می‌توان معادله‌ی مربوطه را نوشت:

نوشتن معادله:

هرگاه **مجموع** ریشه‌ها s و **حاصل‌ضرب** ریشه‌ها p معلوم باشند، آن معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2-sx+p=0$$

برای نمونه؛

اگر جواب‌های معادله‌ای $2-\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{3}$ باشند، چون:

$$s=۲-\sqrt{۳}+۲+\sqrt{۳}=۴ \quad \text{و} \quad p=(۲-\sqrt{۳})(۲+\sqrt{۳})=۴-۳=۱$$

این معادله به صورت $x^۲-۴x+۱=۰$ خواهد بود.

مثال: معادله‌ای که ریشه‌های آن عددهای $\frac{۱}{۲}$ و -۳ باشند را به دو روش بنویسید:

الف) به روش مستقیم.

ب) به روش فرمولی بالا.

پاسخ

الف) باید معادله به صورت زیر باشد:

$$(x-\frac{۱}{۲})(x-(-۳))=۰ \rightarrow (x-\frac{۱}{۲})(x+۳)=۰ \rightarrow x^۲+۳x-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

$$\Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

ب) با توجه به مقادیر $s=\frac{۱}{۲}+(-۳)=-\frac{۵}{۲}$ و $p=(\frac{۱}{۲})(-۳)=-\frac{۳}{۲}$، طبق فرمول:

$$x^۲-sx+p=۰ \Rightarrow x^۲+\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

مثال: معادله‌ای درجه دوم با رعایت دو شرط زیر بنویسید:

الف) یکی از جواب‌های آن $۱-۲\sqrt{۳}$ باشد.

ب) ضرایب آن عددهای گویا باشند.

پاسخ

چون یکی از جواب‌ها $۱-۲\sqrt{۳}$ است، برای این‌که s و p عددهای گویا (غیر رادیکالی) به‌دست آیند، لازم است جواب دیگر مزدوج جواب اول باشد، یعنی: $۱+۲\sqrt{۳}$. بنابراین:

$$s=۱-۲\sqrt{۳}+۱+۲\sqrt{۳}=۲ \quad \text{و} \quad p=(۱-۲\sqrt{۳})(۱+۲\sqrt{۳})=۱^۲-(۲\sqrt{۳})^۲=۱-۱۲=-۱۱$$

و معادله به صورت $x^۲-۲x-۱۱=۰$ نوشته می‌شود.

نوشتن معادلاتی با ریشه‌های مرتبط به هم را با بیان نمونه‌هایی بررسی می‌کنیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-x-۱=۰$ دو واحد کوچک‌تر باشد.

پاسخ

α و β را ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-x-۱=۰$ بگیرید، پس: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=\frac{۱}{۴}$ و $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۴}$ است. باید معادله‌ای با ریشه‌های $\alpha-۲$ و $\beta-۲$ بنویسیم. مجموع و ضرب ریشه‌های آن:

$$s=\alpha-۲+\beta-۲=\alpha+\beta-۴=\frac{۱}{۴}-۴=-\frac{۱۵}{۴}$$

$$p=(\alpha-۲)(\beta-۲)=\alpha\beta-۲(\alpha+\beta)+۴=-\frac{۱}{۴}-۲(\frac{۱}{۴})+۴=\frac{۱۳}{۴}$$

اکنون معادله نوشته می‌شود:

$$x^۲-(-\frac{۱۵}{۴})x+\frac{۱۳}{۴}=۰\xrightarrow{\times ۴}۴x^۲+۱۵x+۱۳=۰$$

---✧---

روش کوتاه:

در سؤالاتی مانند مورد قبل، برای پاسخ دهی سریع‌تر، طبق مراحل زیر عمل کنید:

- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y در نظر بگیرید.
- با توجه به شرط داده شده بین ریشه‌ها، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.
- از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y به‌دست آورده و در معادله‌ی اولیه جایگزین کنید.
- معادله‌ی به‌دست آمده را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

نمونه؛ پاسخ مثال قبل به این روش:

باید $y=x-۲$ باشد؛ پس $x=y+۲$ بوده و در نتیجه:

$$۴(y+۲)^۲-(y+۲)-۱=۰\rightarrow ۴y^۲+۱۶y+۱۶-y-۲-۱=۰\Rightarrow ۴y^۲+۱۵y+۱۳=۰$$

که همان معادله‌ی $۴x^۲+۱۵x+۱۳=۰$ است.

نمونه‌ی دیگری ببینید:

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲-۳x-۱=۰$ یک واحد کمتر باشد.

پاسخ

طبق شرط داده شده می‌نویسیم: $y=\frac{۱}{x}-۱$ و بنابراین $x=\frac{۱}{y+۱}\leftarrow\frac{۱}{x}=y+۱$. عبارت $\frac{۱}{y+۱}$ را در معادله جایگزین x می‌کنیم:

$$۲\times\frac{۱}{(y+۱)^۲}-۳\times\frac{۱}{y+۱}-۱=۰\xrightarrow{\times(y+۱)^۲}۲-۳(y+۱)-(y+۱)^۲=۰$$

$$\rightarrow ۲-۳y-۳-y^۲-۲y-۱=۰\rightarrow -y^۲-۵y-۲=۰$$

$$\Rightarrow y^۲+۵y+۲=۰$$

---✧---

پاسخ دهید (۲)

۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $۴x^۲-mx-۷=۰$ عدد -۱ است. ریشه‌ی دیگر را یک بار به روش دلتا و یک بار با استفاده از روابط بین ریشه‌ها حساب کنید.

۲- محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌متر مربع است. طول و عرض مستطیل را بیابید.

۳– در معادلهی درجه دوم $x^2-4x+1=0$ حاصل عبارت $(x_2^2-4x_2+4)(x_1^2-4x_1+2)$ را حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشههای معادله هستند.)

۴– ریشههای معادلهی $4x^4+7x^2=2$ را حساب کنید.

۵– ریشههای حقیق معادلهی $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ را مشخص کنید.

۶– ریشههای معادلهی $(x-1)^2-5|x-1|+4=0$ را بیابید.

۷– در معادلهی درجه دوم $4x^2-5x+1=0$، حاصل عبارت $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ را بدون محاسبهی ریشهها حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشههای معادله هستند.)

۸– مقدار m را طوری تعیین کنید که معادلهی $x^2+(m^3-m)x+3m+1=0$ دو ریشهی حقیقی قرینه داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۹– در معادلهی $2x^2-mx+5m=0$ مقدار m چقدر باشد تا ریشههای معادله عکس و قرینهی هم باشند؟

منتخب کتاب:

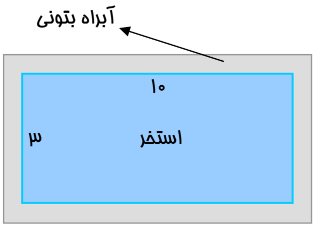
۱– صفرهای تابع $f(x)=2x^3+x^2+3x$ را مشخص کنید.

۲– معادلهی زیر را حل کنید.

$$(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$$

۳– معادلهی درجه دومی بنویسید که یکی از ریشههای آن دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

۴– یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که طبق شکل یک آبراه بتنی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را حساب کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

عددهای متمایز a و b جوابهای معادلهی درجه دوم $(m+2)x^2-2nx+9m=3n$ بوده و $a,3,b$ یک دنبالهی هندسی است. کمترین مقدار صحیح قابل قبول برای m را بیابید.

۳ نمودار تابع درجه دو

در این بخش نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ و برخی ویژگی‌های آن بررسی می‌شود.

صفرهای تابع:

در مورد یک تابع مانند $y=f(x)$:

هر جواب معادله‌ی $f(x)=0$ را یک «صفر» برای این تابع گویند.

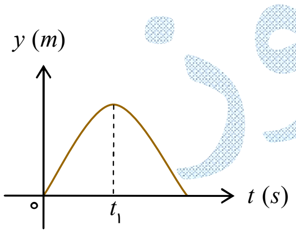
توجه کنید:

در صفرهای تابع، عرض نمودار برابر صفر است. یعنی: آن‌ها نقاط برخورد نمودار با محور طول‌ها هستند.

بویژه:

صفرهای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$، همان ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ هستند.

مثال: اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $30\frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب شود، ضابطه‌ی مکان (ارتفاع) آن بر حسب زمان (t) به صورت $y=-5t^2+30t$ و نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو است:



الف) نقاط برخورد نمودار با محور افقی را تعیین کنید. آن‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) نقطه‌ی به طول t_1 چه معنایی دارد؟

پاسخ

الف) در نقاط برخورد با محور طول، ارتفاع گلوله برابر صفر است؛ نقطه‌ی سمت چپ شروع پرتاب $t=0$ و نقطه‌ی سمت راست، لحظه‌ی بازگشت گلوله به سطح زمین را نشان می‌دهد:

$$y=0 \rightarrow -5t^2+30t=0 \rightarrow -5t(t-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=6 \end{cases}$$

پس گلوله بعد از ۶ ثانیه به زمین برگشته است.

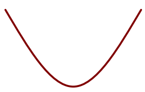
ب) نقطه‌ی به طول t_1 لحظه‌ای را نشان می‌دهد که گلوله به بیشترین ارتفاع خود رسیده است.

یادآوری:

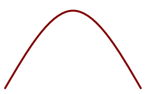
نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همیشه یک **«سهمی»** با مشخصات زیر است:

- نمودار برای $a>0$ دارای می‌نیمم و برای $a<0$ دارای ماکزیمم است. به نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیمم **«رأس»** سهمی گفته می‌شود.

اگر $a>0$ باشد:



اگر $a<0$ باشد:



■ طولِ رأس $x=-\frac{b}{2a}$ و عرض آن با جایگزینی طول در ضابطه یا از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود.

$$y=-\frac{\Delta}{4a} \qquad (\Delta=b^2-4ac)$$

توجه کنید:

چون طول رأس $-\frac{b}{2a}$ بوده و خط عمودی گذرا از رأس، محور تقارن نمودار است، در نتیجه:

خط عمودی به معادله‌ی $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی را مشخص می‌کند.

مثال: در تابع $y=x(2-x)+4x-1$ موارد زیر را پاسخ دهید:

الف) نمودار تابع دارای می‌نیمم است یا ماکزیمم؟

ب) طول نقطه‌ی می‌نیمم یا ماکزیمم و سپس عرض آن را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی محور تقارن نمودار را بنویسید.

پاسخ

الف) ضابطه‌ی تابع را به صورت درجه دوم می‌نویسیم:

$$y=x(2-x)+4x-1=2x-x^2+4x-1 \Rightarrow y=-x^2+6x-1$$

چون ضریب x^2 منفی است، نمودار دارای ماکزیمم خواهد بود.

ب) طول نقطه‌ی ماکزیمم همان طول رأس سهمی است:

$$x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-\frac{6}{2(-1)}=3$$

عرض این نقطه برابر مقدار ماکزیمم نمودار است:

$$y=-3^2+6(3)-1=-9+18-1=8$$

پ) طبق گفته‌های بالا، خط $x=3$ محور تقارن نمودار است.

مثال: تابع $y=x^2+mx-3$ نسبت به خط $x=1$ متقارن است. نقطه یا نقاط برخورد منحنی با محور طول را بیابید.

پاسخ

محور تقارن به صورت $x=-\frac{m}{2(1)}=-\frac{m}{2}$ است. در نتیجه:

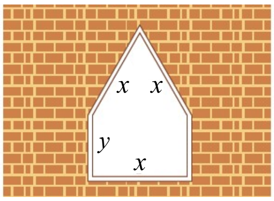
$$-\frac{m}{2}=1 \to m=-2$$

پس تابع به صورت $y=x^2-2x-3$ بوده و تقاطع نمودار با محور طول:

$$x^2-2x-3=0 \to (x-3)(x+1)=0 \Rightarrow x=-1\,,\,3$$

توجه داشته باشید:

عرض رأس سهمی $\left(\frac{-\Delta}{4a}\right)$، بیشترین یا کمترین مقدار عبارت درجه دوم است!



مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

پاسخ

با استفاده از اندازه‌ی محیط:

$$x+y+x+x+y=4 \rightarrow 3x+2y=4 \Rightarrow y=2-\frac{3}{2}x$$

مساحت پنجره مجموع مساحت‌های یک مستطیل و یک مثلث متساوی الاضلاع است:

$$S=xy+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=x(2-\frac{3}{2}x)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+2x$$

چون $\frac{\sqrt{3}-6}{4}$ منفی است، S دارای ماکزیمم است (یعنی: بیشترین مساحت و نوردهی!) که در رأس: $x=-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد:

$$x=-\frac{2}{2(\frac{\sqrt{3}-6}{4})}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}\cong 0/94\ m \quad \Rightarrow \quad y=2-\frac{3}{2}(0/94)=2-1/41=0/59m$$

یادآوری:

وضعیت نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ در دستگاه مختصات و ارتباط آن با ضرایب a، b و c:

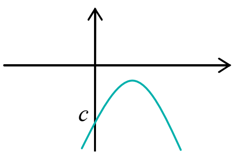
واضح است که:

سهمی مربوطه همواره محور y ها را به عرض c قطع می‌کند:

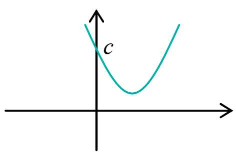
$$x=0 \Rightarrow y=c$$

❖ اگر $\Delta<0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. به‌طور دقیق:

- اگر $a>0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند.
- اگر $a<0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.



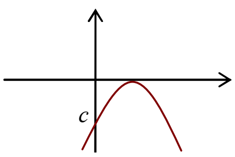
$(a<0)$



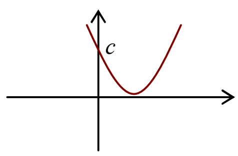
$(a>0)$

❖ اگر $\Delta=0$ باشد، نمودار بر محور طول‌ها مماس است. به‌طور دقیق:

- اگر $a>0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.
- اگر $a<0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.

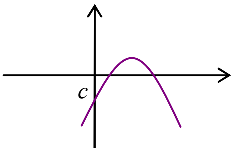


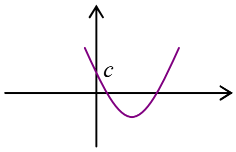
$(a<0)$



$(a>0)$

❖ اگر $\Delta > 0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه (ریشه‌های معادله‌ی $y=0$) قطع می‌کند.





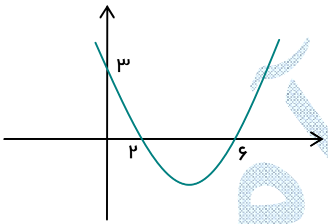
توجه کنید:

در هر حالت، علامت b را با توجه به طول رأس، یعنی: $-\frac{b}{2a}$ یا جمع ریشه‌ها، یعنی: $-\frac{b}{a}$ می‌توان تشخیص داد.

مثال: (از کتاب) الف) نشان دهید اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ باشند، در این صورت:

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ب) ضابطه‌ی سهمی نمودار مقابل را بنویسید.



پاسخ

الف) به آسانی می‌توان نوشت:

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta)=a(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)$$
$$=a(x^2-\frac{-b}{a}x+\frac{c}{a})=ax^2+bx+c$$

ب) با توجه به صفرهای نمودار، ضابطه باید چنین باشد:

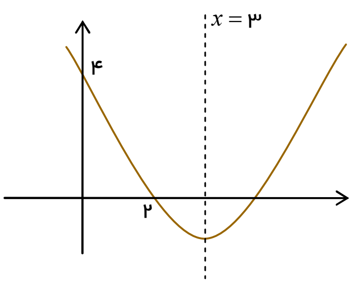
$$f(x)=a(x-2)(x-6)$$

بعلاوه، نقطه‌ی $(0,3)$ روی نمودار است و بنابراین:

$$f(0)=3 \rightarrow a(-2)(-6)=3 \rightarrow a=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow f(x)=\frac{1}{4}\underbrace{(x-2)(x-6)}_{x^2-8x+12} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^2-2x+3$$

مثال: (تمرین کتاب) ضابطه‌ی جبری سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ

چون تقاطع سهمی با محور عرض در ۴ است، ضابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$y=ax^2+bx+4$$

- چون عدد ۲ یک صفر تابع است:

$$0=a(2)^2+b(2)+4 \rightarrow 4a+2b=-4$$

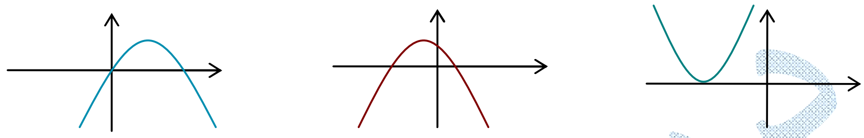
- چون $x=3$ محور تقارن نمودار است:

$$-\frac{b}{2a}=3 \rightarrow -b=6a$$

از حل دستگاه $a=\frac{1}{2}$ و $b=-3$ به‌دست آمده و ضابطه‌ی سهمی $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$ است.

---✧---

مثال: نمودارهای زیر مربوط به توابع به فرم $y=ax^2+bx+c$ است. در هر کدام علامت عدد abc را مشخص کنید.



پاسخ

هر یک از نمودارها را بررسی می‌کنیم:

نمودار سمت راست:

دهانه‌ی نمودار به سمت بالاست و لذا $a>0$ و همچنین پدیهی است که $c>0$. با توجه به طول رأس که منفی است:

$$-\frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0 \Rightarrow abc>0$$

نمودار وسط:

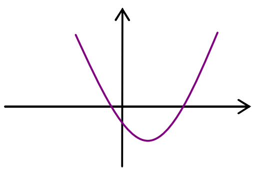
به طور مشابه دیده می‌شود که: $a<0$، $b<0$ و $c>0$؛ پس: $abc>0$. (بررسی جزئیات به عهده‌ی شما!)

نمودار سمت چپ:

چون $c=0$ است، در نتیجه: $abc=0$.

---✧---

مثال: در تابع $y=ax^2+bx+c$ با نمودار روبه‌رو، علامت تمام مقادیر a، b، c، Δ، s و p را مشخص کنید.



پاسخ

واضح است که $a>0$ و $c<0$. پس: $p=\frac{c}{a}<0$. چون طول رأس سهمی مثبت است:

$$-\frac{b}{2a}>0 \rightarrow \frac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b<0$$

در نتیجه: $s=-\frac{b}{a}>0$. بالاخره، چون نمودار دو نقطه‌ی برخورد با محور طول دارد، $\Delta>0$ است.

---✧---

گاهی حل معادلات به روش جبری دشوار یا حتی غیرممکن است، روش هندسی ممکن است سودمند باشد.

روش هندسی:

یک معادله‌ی داده شده را سعی می‌کنیم به صورت $f(x)=g(x)$ بنویسیم با این شرط که:

نمودارهای f و g نسبتاً ساده قابل رسم باشند.

در این صورت:

- نمودارهای f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
- نقاط تقاطع نمودارها در صورت وجود، جواب‌های تقریبی معادله و بویژه تعداد جواب‌ها را مشخص خواهد کرد.

حالت خاص:

می‌دانیم جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$، نقاط برخورد نمودار $y=f(x)$ با محور طول $(y=0)$ هستند.

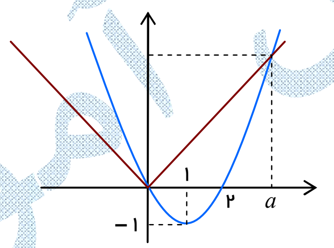
مثال: (از کتاب) معادله‌ی $|x|=x^2-2x$ را به روش هندسی حل کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2-2x$. تابع g به صورت مناسب زیر نوشته می‌شود:

$$\xrightarrow{\pm 1} g(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$$

نمودار f شناخته شده است و نمودار g نیز با دو انتقال افقی و عمودی از سهمی $y=x^2$ رسم می‌شود:



می‌بینید که:

- یک نقطه‌ی برخورد در مبدأ بوده و در نتیجه $x=0$ یک جواب است.
- نقطه‌ی برخورد دیگر، دارای طول مجهول a است که در ظاهر عدد ۳ حدس زده می‌شود؛ با آزمایش در معادله صدق کرده و در نتیجه جواب دوم $x=3$ خواهد بود.

(نمونه‌های دیگری از حل هندسی معادلات، بعد از آشنایی بیشتر با رسم نمودار، در ادامه آورده شده است.)

پاسخ دهید (۳)

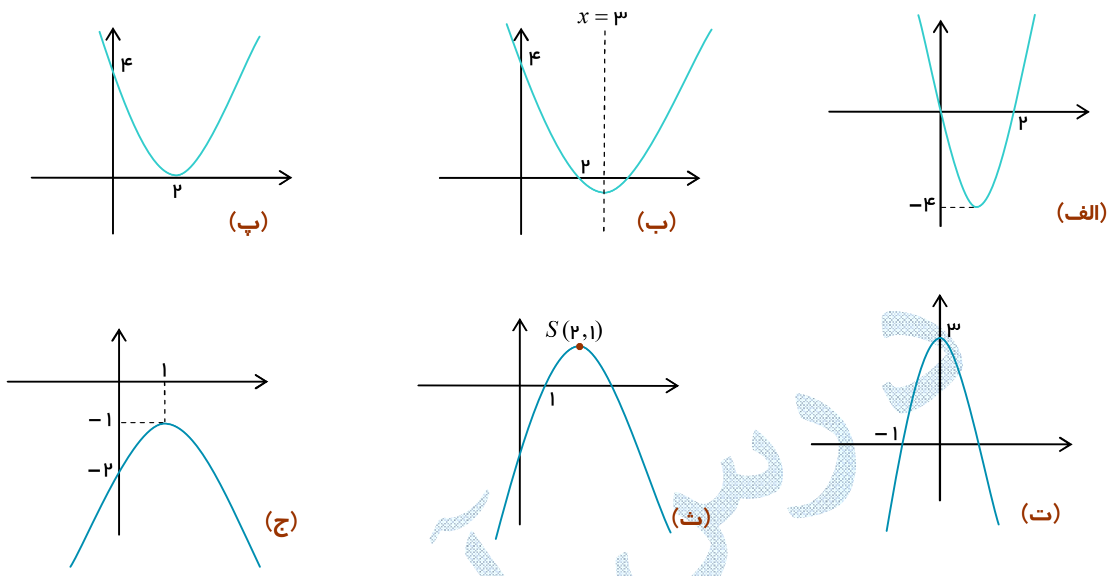
۱- صفرهای تابع درجه چهارم $y=x^4-5x^2+4$ را مشخص کنید.

۲- اگر منحنی تابع درجه دوم $y=(a-1)x^2+x+3$ نسبت به خط $x=2$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با چه طول مثبتی قطع می‌کند؟

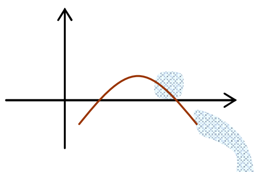
۳- اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ به‌ازای هر مقدار x منفی باشد، محدوده‌ی a را مشخص کنید.

۴- بیشترین مقدار تابع $f(x)=\frac{-x^2}{2}+20x$ را بیابید.

۵– معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید:

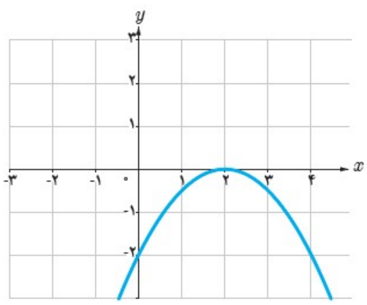


۶– نمودار تابع $y = ax^۲ + ۸x - ۴$ به شکل مقابل است. برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

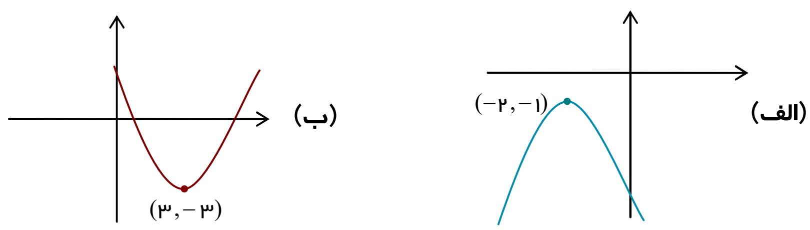


منتخب کتاب:

۱– در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



۲– در موارد زیر، نمودار سهمی $P(x) = ax^۲ + bx + c$ با شرط $|a| = ۱$ و مختصات رأس هم داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود مشخص کرده و ضابطه‌ی تابع را بنویسید.



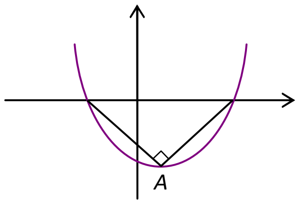
۳– تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $|x-۱| = x^۲ - x - ۱$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

در شکل مقابل نمودار سهمی $y = x^{2} + 2mx - m^{2}$ داده شده است.

مقدار m را تعیین کنید. (A رأس سهمی است.)



۴ معادلات گویا و اصم

معادله‌ای که بر حسب عبارت‌های گویا، (یعنی: عبارت کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای) باشد را یک «**معادله‌ی گویا**» گوئیم. مانند:

$$\frac{x}{x^{۲}+۴x}=\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x+۴}$$

بعد از حل چنین معادلاتی، فقط عددهای موجود در دامنه می‌توانند جوابی قابل قبول باشند:

دامنه:

در یک عبارت گویا، دامنه شامل تمام عددهای حقیقی، به جز ریشه‌های مخرج است:

$$D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

توجه کنید:

اگر در یک معادله چند کسر گویا داشته باشیم، باید ریشه‌های تمام آن‌ها از $\mathbb{R}$ برداشته شود.

برای نمونه؛

دامنه‌ی معادله‌ی $\frac{x}{x^{۲}+۲x}=\frac{۱}{x}-\frac{۳}{x-۲}$ را مشخص می‌کنیم.

ریشه‌های هر سه مخرج:

$$x^{۲}+۲x=۰ \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x=۰ \\ x=-۲ \end{array} \right. \quad \text{و} \quad x=۰ \quad \text{و} \quad x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

پس دامنه برابر است با:

$$D=\mathbb{R}-\{۰,۲,-۲\}$$

مستطیل طلایی:

اگر در یک مستطیل به طول l و عرض w داشته باشیم:

(نسبت طول به عرض برابر نصف نسبت محیط به طول است!) $\quad \frac{l}{w}=\frac{l+w}{l}$

گوئیم: «مستطیل، طلایی است» یا «در مستطیل، نسبت طلایی برقرار است».

مثال: (از کتاب) در یک سالن ورزشی مستطیل شکل، محیط برابر ۱۴۴ متر و در آن نسبت طلایی برقرار است. طول و عرض سالن را مشخص کنید.

پاسخ

باید داشته باشیم: $l+w=\frac{۱۴۴}{۲}=۷۲$ و در نتیجه: $w=۷۲-l$ است. چون مستطیل طلایی است:

$$\frac{l}{۷۲-l}=\frac{l+۷۲-l}{l}\rightarrow\frac{l}{۷۲-l}=\frac{۷۲}{l}\rightarrow l^{۲}+۷۲l-۷۲^{۲}=۰$$

به روش دلتا: $\Delta=۷۲^{۲}-۴(۱)(-۷۲^{۲})=۵\times ۷۲^{۲}$ بوده و در نتیجه:

$$l=\frac{-۷۲\pm\sqrt{۵\times ۷۲^{۲}}}{۲(۱)}=\frac{-۷۲\pm ۷۲\sqrt{۵}}{۲}=-۳۶\pm ۳۶\sqrt{۵}$$

فقط جواب $l=-۳۶+۳۶\sqrt{۵}$ مثبت و قابل قبول بوده و در نتیجه:

$$w=۷۲-l=۷۲-(-۳۶+۳۶\sqrt{۵})=۱۰۸-۳۶\sqrt{۵}$$

حل معادلات گویا:

در حالت کلی، طبق مراحل زیر عمل می‌شود:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و سپس آن را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله‌ای که به‌دست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که در دامنه قرار داشته باشند.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب، کافی است جایگذاری آن در تمام مخرج‌ها، هیچ کدام از آن‌ها را صفر نکند.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x+۱}{x}-\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۲x}=\frac{x-۱}{x-۲}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

چون $x^{۲}-۲x=x(x-۲)$، همین عبارت ک.م.م مخرج‌ها است. طبق روش بالا می‌نویسیم:

$$x(x-۲)\times\frac{x-۱}{x-۲}=x(x-۲)\times\frac{x^{۲}-۲x+۲}{x^{۲}-۲x}-x(x-۲)\times\frac{x+۱}{x}$$

$$\rightarrow\ x^{۲}-x=x^{۲}-۲x+۲-x^{۲}-x+۲x+۲\ \rightarrow\ x^{۲}=۴\ \rightarrow\ x=\pm ۲$$

چون عدد ۲ مخرج کسر سمت چپ را صفر می‌کند، قابل قبل نیست و فقط ۲ − پذیرفته می‌شود.

توجه کنید:

منظور از محلول آب نمک ۵ درصدی، یعنی نسبت جرم نمک به جرم آب برابر $\frac{۵}{۱۰۰}$ است!

مثال: (از کتاب) در یک مغازه‌ی ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. فرض کنیم فقط ۵ کیلوگرم نمک در دسترس باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. در این شرایط، او باید چند کیلوگرم از محلول را تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی برسد؟

پاسخ

مقدار نمک موجود در محلول ساخته شده: $\frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰=۸$ (کیلوگرم)

با اضافه کردن ۵ کیلوگرم نمک موجود، $۸+۵=۱۳$ کیلوگرم نمک در ۲۰۵ کیلوگرم محلول وجود خواهد داشت. اگر لازم باشد x کیلوگرم از آب تبخیر شود، مقدار محلول $۲۰۵-x$ کیلوگرم خواهد شد و باید داشته باشیم: $\frac{۷}{۱۰۰}=\frac{۱۳}{۲۰۵-x}$. حل معادله:

$$۱۳\times۱۰۰=۷\times۲۰۵-۷x \rightarrow ۷x=۱۴۳۵-۱۳۰۰=۱۳۵ \Rightarrow x=\frac{۱۳۵}{۷}\cong۱۹/۲۹ \quad \text{(کیلوگرم)}$$

---✧---

توجه کنید:

وقتی بتوان یک کار را در x ساعت انجام داد، در هر ساعت $\frac{۱}{x}$ از آن کار انجام خواهد شد!

مثال: اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ

فرض کنید ماشین (۱) دو برابر سریع‌تر از ماشین (۲) باشد. پس:

اگر ماشین (۱) در x ساعت کل کار را انجام دهد، ماشین (۲) در $۲x$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

اکنون اگر هر ماشین تنهایی یک ساعت کار کند، طبق اطلاعات بالا:

ماشین (۱) اندازه‌ی $\frac{۱}{x}$ از کل کار و ماشین (۲) اندازه‌ی $\frac{۱}{۲x}$ از کل کار را انجام خواهد داد.

پس اگر هر دو ماشین یک ساعت با هم کار کنند، $\frac{۱}{۲x}+\frac{۱}{x}$ از کار انجام می‌شود که طبق فرض سؤال برابر $\frac{۱}{۴}$ از آن است:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\times ۴x} ۴+۲=x \Rightarrow x=۶\ ,\ ۲x=۱۲$$

---✧---

مطلب بعدی در برخی سؤالات نسبتاً قوی و گاهی برای حل سریع مورد نیاز است:

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a+\frac{۱}{a}$، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مطلب مهم زیر وجود دارند:

- اگر a مثبت باشد، همواره داریم $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{۱}{a}=۲$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=۱$ باشد.

- اگر a منفی باشد، همواره داریم $a+\frac{1}{a}\le -2$. به‌علاوه:

تساوی $a+\frac{1}{a}=-2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=-1$ باشد.

مثال: معادله‌ی $\frac{x^2-2}{2x+1}=2-\frac{2x+1}{x^2-2}$ را حل کنید.

پاسخ

به محض مشاهده‌ی دو عبارت معکوس هم در یک عبارت، نکته‌ی قبل را به یاد آورید:

$$\frac{x^2-2}{2x+1}=2-\frac{2x+1}{x^2-2}\to\frac{x^2-2}{2x+1}+\frac{2x+1}{x^2-2}=2\Rightarrow\frac{x^2-2}{2x+1}=1$$

معادله‌ی جدید را با طرفین وسطین جواب می‌دهیم:

$$x^2-2=2x+1\to x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1\,,\,3$$

جواب‌های به‌دست آمده ریشه‌ی هیچ مخرجی از معادله نبوده و هر دو قابل قبول هستند.

---✧---

اکنون روش حل معادلات اصم (رادیکالی) مانند نمونه‌های زیر را ببینیم:

$$2\sqrt{1-x}+x=1 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x-2}=2+x$$

دامنه‌ی جواب:

در یک معادله‌ی اصم، باید دو شرط برقرار باشند تا جواب به‌دست آمده قبول شود:

اولاً: داخل هیچ کدام از رادیکال‌ها منفی نشود.

ثانیاً: هر رادیکال نیز به تنهایی نباید با یک عبارت منفی برابر شود.

نمونه‌ای ببینید:

مثال: دامنه‌ی جواب معادله‌ی $2x+\sqrt{2x-1}=1$ را مشخص کنید.

پاسخ

اولاً: باید داشته باشیم:

$$2x-1\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{1}{2}$$

ثانیاً: اگر رادیکال را تنها کنیم: $\sqrt{2x-1}=1-2x$، اکنون باید سمت راست هم منفی نشود:

$$1-2x\ge 0\Rightarrow x\le\frac{1}{2}$$

اشتراک دو شرط بالا برابر دامنه‌ی جواب معادله است: $D=\{\frac{1}{2}\}$.

---✧---

معادلات اصم را می‌توان بدون تعیین دامنه و به روش زیر حل کرد:

حل معادلات اصم:

طبق دستورات زیر عمل کنید:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رسانده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب، آن را در معادله قرار داده و باید صدق کند.

مثال: معادله‌ی $۲x+\sqrt{۲x-۱}=۱$ را حل کنید.

پاسخ

طبق روش بالا می‌نویسیم:

$$\sqrt{۲x-۱}=۱-۲x \rightarrow ۲x-۱=(۱-۲x)^۲ \rightarrow ۲x-۱=۱-۴x+۴x^۲$$

معادله به صورت $۴x^۲-۶x+۲=۰$ مرتب شده و در نتیجه طبق روش تجزیه حل می‌شود:

$$(۲x)^۲-۳(۲x)+۲=۰ \rightarrow (۲x-۱)(۲x-۲)=۰ \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} ۲x-۱=۰ \rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ ۲x-۲=۰ \rightarrow x=۱ \end{array}\right.$$

جواب‌ها را در معادله آزمایش می‌کنیم:

$x=\frac{۱}{۲}: \quad ۲(\frac{۱}{۲})+\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})-۱}=۱ \Rightarrow ۱=۱$ **قابل قبول**

$x=۱: \quad ۲(۱)+\sqrt{۲(۱)-۱}=۱ \Rightarrow ۳\neq ۱$ **غیرقابل قبول**

پس فقط یک جواب $x=\frac{۱}{۲}$ مورد قبول خواهد بود.

حل مثال قبل: (روش دوم)

معادله را به صورت $\sqrt{۲x-۱}=۱-۲x$ نوشته و لازم است زیر رادیکال و همچنین سمت راست نامنفی باشند:

$$۲x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq \frac{۱}{۲} \quad و \quad ۱-۲x\geq ۰ \Rightarrow x\leq \frac{۱}{۲}$$

پس فقط عدد $\frac{۱}{۲}$ می‌تواند جواب این معادله باشد که صدق کردن در معادله، باعث پذیرش آن می‌شود:

$$۲(\frac{۱}{۲})+\sqrt{۲(\frac{۱}{۲})-۱}=۱ \Rightarrow ۱=۱$$

مثال: معادله‌ی $\sqrt{x^۳+x}-\sqrt{-x}=۰$ را حل کنید.

پاسخ

چون دو عبارت رادیکالی داریم، یکی را در سمت چپ و دیگری را به سمت راست برده و مانند قبل:

$$\sqrt{x^2+x}=\sqrt{-x} \rightarrow x^2+x=-x \rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

با آزمایش جواب‌ها می‌بینید که هر دو قابل قبول هستند:

$x=0: \quad \sqrt{0^2+0}-\sqrt{-0}=0 \Rightarrow 0=0$ قابل قبول

$x=-2: \quad \sqrt{(-2)^2-2}-\sqrt{-(-2)}=0 \Rightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ قابل قبول

حالت ویژه‌ای در معادلات:

مجموع عبارات نامنفی:

گاهی چند رادیکال (در حالت کلی: چند عبارات نامنفی مانند رادیکال، مجذور یا قدرمطلق عبارات) با هم جمع شده و حاصل برابر صفر است. در این صورت:

فقط عددی به عنوان جواب قبول است که تمام عبارات جمع را همزمان صفر کند.

نمونه‌ای ببینید:

مثال: معادله‌ی $\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{1-x}=0$ را حل کنید.

پاسخ

در اولین رادیکال فقط یک ریشه داریم:

$$1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

بنابراین فقط در صورتی که عدد -1 همه‌ی رادیکال‌ها را صفر کند، به عنوان جواب قبول می‌شود:

عدد $x=-1$ عبارت $\sqrt{x^2-1}$ را صفر کرده ولی $\sqrt{1-x}$ را صفر نمی‌کند.

پس معادله هیچ جوابی ندارد.

مثال: (از کتاب) معادله‌ی $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید.

آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

پاسخ

طبق روش معمول حل معادلات:

$$\sqrt{x^2-4}=-2\sqrt{x-2} \rightarrow x^2-4=4(x-2) \rightarrow x^2-4x+4=0$$
$$\rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

توجه کنید:

طبق مطلب قبل، جواب معادله بدون استفاده از روش بالا نیز قابل تعیین است: (ریشه‌ی داخل رادیکال دوم $x=2$ بوده که چون رادیکال اول را هم صفر می‌کند، این جواب قابل قبول خواهد بود.)

پاسخ دهید (۴)

۱- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $\frac{x}{۲x-۴}+\frac{x+۶}{k+۴}=۳$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر را بیابید.

۲- اگر معادلات $\frac{۲}{x^۲-۲x}=\frac{۱}{x}-\frac{x+۲}{x-۲}$ و $\frac{۲k}{x+۲}=۶+kx$ جواب مشترک داشته باشند، مقدار k را بیابید.

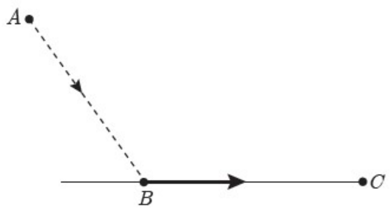
۳- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $۲x+\sqrt{۲x-۱}=۱$

ب) $\sqrt{x-۴}+\sqrt{x-۴\sqrt{x-۴}}=۲$

۴- حاصل‌ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۵}$ را به‌دست آورید.

۵- معمولاً مرغ‌های دریایی برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه‌ی A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله‌ی تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه‌ی C قرار دارد، ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌آید، سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلو کالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند، نقطه‌ی B باید در چه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟



منتخب کتاب:

۱- معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{p}{۲-p}+\frac{۲}{p}=-\frac{۳}{۲}$

ب) $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

پ) $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

ت) $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴$

۲- ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین این کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۳- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند، ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف، همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

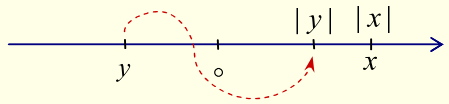
برای عدد مثبت a داریم: $a^{2}-17a-16\sqrt{a}=0$. مقدار $\sqrt{a-\sqrt{a}}$ را حساب کنید.

۵ قدرمطلق و خواص

مفهوم قدر مطلق و خواص آن در مباحث گوناگون ریاضی، از جمله توابع و نمودارها، حل معادلات و نامعادلات بسیار به‌کار می‌رود. این مفهوم را در ادامه به صورت دقیق معرفی می‌کنیم.

قدر مطلق:

قدرمطلق یک عدد حقیقی x را با $|x|$ نشان می‌دهیم و آن برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی x تا مبدأ مختصات روی محور اعداد:



بیان دوضابطه‌ای قدرمطلق طبق نمودار بالا:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

قدر مطلق، عدد یا عبارت منفی را قرینه کرده و روی سایر مقادیر تاثیری ندارد.

برای نمونه؛

چون عدد $4-3\sqrt{2}\cong 4-3\times 1/4$ منفی است، پس:

$$|4-3\sqrt{2}|=-(4-3\sqrt{2})=3\sqrt{2}-4$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

نمایش عبارت «فاصله‌ی بین x و ۳ برابر ۷ است.» با نماد قدرمطلق به صورت . . . . است.

جواب: فاصله‌ی x و ۳ به صورت $|x-3|$ و جواب مورد نظر $|x-3|=7$ است.

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

ب) $|5+b|+\sqrt{4+4a^2+a^4}+|2a-3b|$ با شرط $a<0<b$.

پاسخ

الف) با اطلاع از این‌که $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$ است، طبق آن‌چه گفتیم:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0}|=\sqrt{2}-1$$

ب) عبارت رادیکالی: $\sqrt{4+4a^2+a^4}=\sqrt{(2+a^2)^2}=|\underbrace{2+a^2}_{>0}|=2+a^2$. بعلاوه، طبق شرط داده شده، $5+b$ مثبت و $2a-3b$ منفی است. حاصل عبارت:

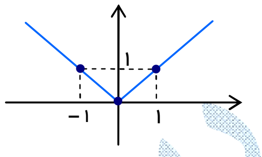
$$5+b+2+a^2-(2a-3b)=4b+a^2-2a+7$$

---✧---

رسم نمودارهای قدرمطلق در مباحث گوناگون کاربردهای زیادی دارد.

یادآوری: رسم نمودار تابع $y=|x|$:

طبق ضابطه‌های $|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$، برای $x<0$، خط $y=-x$ و برای $x\geq 0$، باید خط $y=x$ رسم شود.



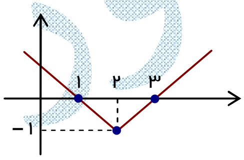
x	-1	0	1
y	-1	-1	1

✧ **مثال:** نمودار تابع $y=|x-2|-1$ را به روش انتقال رسم کنید.

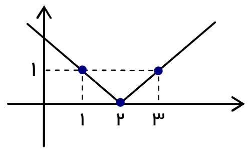
☑ پاسخ

رسم دو مرحله‌ای با شروع از نمودار $y=|x|$، طبق روش‌های گفته شده:

۱) $y=|x-2|$ (دو واحد انتقال به راست)　　۲) $y=|x-2|-1$ (یک واحد انتقال به پایین)



⇦



---✧---

توجه کنید:

۱) تبدیل ضابطه قدرمطلقی به چندضابطه‌ای، با توجه به علامت عبارت داخل قدر، مانند زیر انجام می‌شود:

$$y=|2x+1|=\begin{cases} -(2x+1) & 2x+1<0 \\ 2x+1 & 2x+1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x+1|=\begin{cases} -2x-1 & x<-\frac{1}{2} \\ 2x+1 & x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

۲) وقتی ضابطه دارای چند قدر مطلق باشد، می‌توانید با تقسیم محدوده‌ی x مانند مورد بالا، قدرمطلق‌ها را حذف کرده و نمودار را رسم کنید.

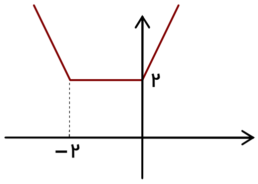
✧ **مثال:** نمودار تابع $y=|x+2|+|x|$ را رسم کنید.

☑ پاسخ

ریشه‌های داخل قدرها -2 و 0 هستند. با توجه به این‌که x قبل یا بعد از ریشه‌ها باشد، قدرمطلق‌ها ساده می‌شوند:

$$y=|x+2|+|x|=\begin{cases} -(x+2)-(x) & x<-2 \\ (x+2)-(x) & -2\leq x\leq 0 \\ (x+2)+(x) & x>0 \end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -2x-2 & x<-2 \\ 2 & -2\leq x\leq 0 \\ 2x+2 & x>0 \end{cases}$$

اکنون نمودار چند ضابطه‌ای به آسانی رسم می‌شود:



---✰---

بد نیست بدانیم!

برای رسم توابعی مانند نمونه‌ی قبل، روش کوتاه‌تری هم وجود دارد؛ ببینید:

رسم سریع:

برای رسم توابع **«گلدان»** یا **«آبشار»** و موارد مشابه مانند:

$$y=|ax\pm b|\pm|cx\pm d| \qquad \text{و} \qquad y=|ax\pm b|\pm cx\pm d$$

چنین عمل کنید:

- ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین کنید.
- یک عدد قبل از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بعد از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیرید.
- مقدار تابع را در ریشه‌ها و نقاط مرحله‌ی قبل مشخص کنید.
- این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و به طور متوالی توسط پاره خط‌هایی به هم اتصال دهید.

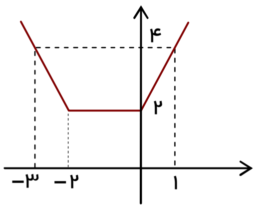
برای نمونه؛

رسم نمودار تابع $y=|x+۲|+|x|$ که بالاتر با ضابطه‌بندی انجام دادیم را به روش سریع هم انجام می‌دهیم.

تعیین ریشه‌ها:

$$|x|:\ x=۰ \qquad \text{و} \qquad |x+۲|:\ \ x+۲=۰ \rightarrow x=-۲$$

این دو ریشه را به همراه یک عدد قبل از -۲ و یک عدد بعد از صفر در جدول مقادیر قرار داده و از اتصال نقاط، نمودار رسم می‌شود:



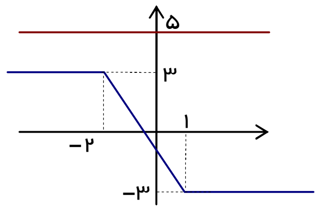
x	−۳	−۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴

مثال: به روش هندسی، تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x-۱|-|x+۲|=۵$ را مشخص کنید.

پاسخ

به روش نمونه‌ی قبلی؛

نمودار $y=|x-۱|-|x+۲|$ و همچنین خط $y=۵$ را رسم کرده تا برخوردهای آن‌ها تعداد جواب‌ها را معلوم کند.



x	-۳	-۲	۱	۲
y	۳	۳	-۳	-۳

چون نمودارها برخوردی ندارند، معادله هیچ جوابی ندارد.

---✧---

ویژگی‌های قدرمطلق:

- بدیهی است که: $|x| \geq 0$ است.
- همواره داریم: $|-x| = |x|$، یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان قرینه کرد.

در نتیجه:

تساوی‌های $|-x-y| = |x+y|$ و $|x-y| = |y-x|$ همواره برقرار هستند.

- برای هر x داریم: $\sqrt{x^2} = |x|$، ولی $(\sqrt{x})^2 = x$ است که البته در عبارت دوم x نمی‌تواند منفی باشد.

بعلاوه:

تساوی‌های $x^2 = y^2$ و $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ و $|x| = |y|$ معادل بوده و از هر سه نتیجه می‌شود:

$$y = \pm x$$

- برای هر $n \in \mathbb{N}$ زوج داریم: $|x^n| = |x|^n = x^n$. بویژه: $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

برای نمونه: $|2x-1|^2 = (2x-1)^2$. پس:

در قدرمطلق با توان زوج، می‌توان قدر را به پرانتز تبدیل کرد.

مثال: (از کتاب) فرض کنید x و y عددهای حقیقی دلخواه باشند.

الف) با استفاده از رابطه‌ی $\sqrt{x^2} = |x|$ نشان دهید: $|xy| = |x||y|$.

ب) با فرض $y \neq 0$ و استفاده از مرحله‌ی قبل ثابت کنید: $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

پاسخ

الف) به آسانی می‌توان نوشت:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|$$

ب) با استفاده از خاصیت ضربیِ قدرمطلق می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \left|x \times \frac{1}{y}\right| = |x|\left|\frac{1}{y}\right| = |x|\frac{1}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$$

---✧---

نامعادلات ویژه:

دو خاصیت زیر در تبدیل نامساوی‌ها و حل نامعادلات کاربرد فراوان دارند: ($a > ۰$)

- نامساوی $|x| \le a$ معادل این است که $-a \le x \le a$.
- نامساوی $|x| \ge a$ معادل این است که $x \ge a$ یا $x \le -a$.

در صورتی‌که علامت‌ها به صورت « $>$ » یا « $<$ » باشند، جواب‌ها نیز همین علامت‌ها را خواهند داشت.

برای نمونه؛

مقادیر قابل قبول در نامساوی $|x| < ۲$، دقیقاً عددهای $-۲ < x < ۲$ هستند. (برای درک بهتر، می‌توانید از نمایش روی محور کمک بگیرید.) همچنین:

$$|x| \ge ۳ \Rightarrow -۳ \le x \quad \text{یا} \quad x \ge ۳$$

(سؤال: اگر عدد a صفر یا منفی باشد، وضعیت دو حالت بالا چگونه خواهد شد؟)

مثال: برای عددهای حقیقی x و y موارد زیر را نشان دهید:

الف) $-|x| \le x \le |x|$

ب) با توجه به قسمت قبل نشان دهید $-|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y|$ و سپس نتیجه بگیرید که:

$$\boxed{|x+y| \le |x| + |y|}$$

نامساوی بالا را **«نامساوی مثلث»** گویند.

پ) از قسمت قبل نتیجه بگیرید که همواره:

$$|x-y| \le |x| + |y|$$

پاسخ

الف) ابتدا حالت $x > ۰$ را در نظر بگیرید. چون $|x| = x$ و $-|x|$ منفی است، بنابراین نامساوی $-|x| \le x \le |x|$ برقرار است. اگر $x < ۰$ باشد، $-x$ مثبت است و بنابراین:

$$-|-x| \le -x \le |-x| \rightarrow -|x| \le -x \le |x| \xrightarrow{\times(-)} -|x| \le x \le |x|$$

ب) کافی است از قسمت قبل کمک بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \le x \le |x| \\ -|y| \le y \le |y| \end{array}\right\} \xrightarrow{+} -|x| - |y| \le x + y \le |x| + |y|$$

$$\Rightarrow -(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$$

اکنون چون $x+y$ بین $|x|+|y|$ و قرینه‌اش قرار دارد، طبق نکته‌ی قبل:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

پ) طبق قسمت قبل می‌نویسیم:

$$|x-y| = |x+(-y)| \le |x| + |-y| = |x| + |y|$$

حل معادلات:

معمولاً معادلات قدرمطلقی با تبدیل آن‌ها به صورت $|x| = a$ طبق حالت‌های زیر حل می‌شوند:

- اگر a منفی باشد، معادله بدون جواب است. برای نمونه، معادله‌ی $|x| + ۲ = ۰$:

$|x|+۲=۰ \rightarrow |x|=-۲$ بدون جواب

- اگر a مثبت باشد، طبق قاعده‌ی: $|x|=a \Rightarrow x=\pm a$، جواب‌ها در دو حالت مشخص می‌شوند.

برای نمونه، معادله‌ی $|۲-x|-۱=۰$:

$$|۲-x|-۱=۰ \rightarrow |۲-x|=۱ \rightarrow \begin{cases} ۲-x=۱ \Rightarrow x=۱ \\ ۲-x=-۱ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$ دو جواب

- در حالت خاص $a=۰$، فقط یک جواب داریم: $|x|=۰ \Rightarrow x=۰$. برای نمونه، معادله‌ی $|۲-x|=۰$:

$$|۲-x|=۰ \rightarrow ۲-x=۰ \Rightarrow x=۲$$ یک جواب

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

معادله‌ی $||x|-۱|=۲$ را به روش جبری حل کنید.

پاسخ

دو حالت $|x|-۱=۲$ و $|x|-۱=-۲$ می‌تواند رخ دهد. بررسی هر دو:

$$|x|-۱=-۲ \Rightarrow |x|=-۱$$ (غیر ممکن)

$$|x|-۱=۲ \rightarrow |x|=۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۳ \end{cases}$$

مثال: معادله‌ی $x^۲-|x|-۶=۰$ را حل کنید.

پاسخ

با تبدیل $|x|=t$ و توجه به خاصیت $|x|^۲=x^۲$، $t^۲=|x|^۲=x^۲$، معادله به درجه دو تبدیل می‌شود:

$$t^۲-t-۶=۰ \rightarrow (t-۳)(t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t-۳=۰ \Rightarrow t=۳ \\ t+۲=۰ \Rightarrow t=-۲ \end{cases}$$

اکنون جایگذاری در تساوی $|x|=t$ و تعیین مقادیر x:

$$t=۳ \rightarrow |x|=۳ \Rightarrow \begin{cases} x=۳ \\ x=-۳ \end{cases} \quad \text{و} \quad t=-۲ \rightarrow |x|=-۲$$ (بدون جواب)

پس معادله دارای دو جواب است.

تذکر:

اگر معادله دارای چندین قدرمطلق باشد، می‌توان با تعیین محدوده‌های گوناگون x، جواب‌های دقیق را تعیین کرد. (برای تعیین فقط تعداد جواب‌ها، معمولاً روش هندسی بهتر است.)

مثال: معادله‌ی $|x-۱|+|x+۲|=۵$ چند جواب دارد؟

پاسخ

با توجه به ریشه‌های داخل قدرها که -۲ و ۱ هستند، سه حالت خواهیم داشت:

(۱) $x<-۲: \; -(x-۱)-(x+۲)=۵ \rightarrow -۲x=۶ \Rightarrow x=-۳$

(۲) $-۲\le x<۱: \; -(x-۱)+(x+۲)=۵ \rightarrow ۳=۵$ غیرممکن

$$(۳)\quad x \geq ۱:\ (x-۱)+(x+۲)=۵ \to ۲x=۴ \Rightarrow x=۲$$

پس در کل دو جواب حاصل می‌شود.

حالت خاص:

طبق مفهوم قدرمطلق، در تساوی $|a|=|b|$، فقط دو حالت ممکن است:

(a و b برابر باشند.) $a=b$ یا (a و b قرینه باشند.) $a=-b$

دلیل به روش دیگری هم قابل بیان است:

$$|a|=|b| \to |a|^۲=|b|^۲ \to a^۲=b^۲ \xrightarrow{a^۲-b^۲=۰} (a-b)(a+b)=۰$$

$$\to \begin{cases} a-b=۰ \Rightarrow a=b \\ a+b=۰ \Rightarrow a=-b \end{cases}$$

چند نمونه‌ی دیگر از حل معادلات قدرمطلقی ببینید.

مثال: معادله‌ی $|x+۳|=|۱-۲x|$ را به دو روش زیر حل کنید.

الف) با استفاده از خواص قدرمطلق.

ب) به توان رسانی دو طرف معادله.

پاسخ

الف) طبق خاصیت: ($|a|=|b| \Rightarrow a=\pm b$) می‌نویسیم:

$$۱-۲x=\pm(x+۳) \to \begin{cases} ۱-۲x=x+۳ \Rightarrow x=-\dfrac{۲}{۳} \\ ۱-۲x=-x-۳ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$

ب) دو طرف معادله به توان دو رسیده و قدر حذف می‌شود:

$$(۱-۲x)^۲=(x+۳)^۲ \to ۱-۴x+۴x^۲=x^۲+۶x+۹ \to ۳x^۲-۱۰x-۸=۰$$

$$\xrightarrow{\times ۳} (۳x)^۲-۱۰(۳x)-۲۴=۰ \to (۳x-۱۲)(۳x+۲)=۰$$

$$\to \begin{cases} ۳x-۱۲=۰ \Rightarrow x=۴ \\ ۳x+۲=۰ \Rightarrow x=-\dfrac{۲}{۳} \end{cases}$$

مثال: (از کتاب) معادله‌ی قدرمطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را به دو روش حل کنید:

الف) تعریف قدرمطلق

ب) توان رسانی

پاسخ

الف) عبارت $x-۱$ برای $x<۱$ منفی و برای $x \geq ۱$ نامنفی است. معادله را با تفکیک به این دو حالت حل می‌کنیم:

$$x<۱:\quad -(x-۱)=۴-۳x \to -x+۳x=۴-۱ \Rightarrow x=\dfrac{۳}{۲}$$

(جواب قبول نیست، چون در محدوده $x<۱$ قرار ندارد.)

$x \geq 1$: $x-1=4-3x \rightarrow x+3x=4+1 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$ (جواب قبول است)

ب) با شرط منفی نبودن سمت راست: ($4-3x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{4}{3}$) دو طرف معادله به توان ۲:

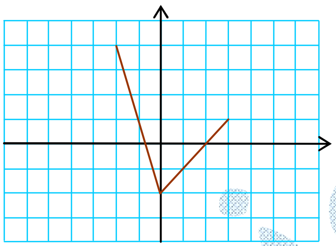
$$|x-1|^2=(4-3x)^2 \rightarrow x^2-2x+1=16-24x+9x^2 \rightarrow 8x^2-22x+15=0$$

$$\xrightarrow{\times 2} (4x)^2-11(4x)+30=0 \rightarrow (4x-5)(4x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ x=\frac{6}{4} \end{cases}$$

فقط $x=\frac{5}{4}=1/25$ در شرط $x \leq \frac{4}{3} \cong 1/3$ صدق کرده و قابل قبول است.

در پایان این بخش، رسم نمودار $|f(x)|$ توسط نمودار $f(x)$ را خواهیم دید.

مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار $y=-f(x)$ را رسم کرده و روش رسم را توصیف کنید.

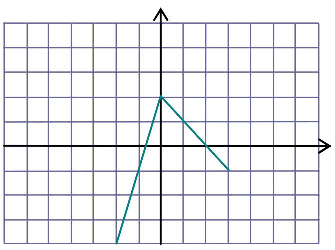
ب) چگونه با توجه به قسمت (الف) می‌توان روشی برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ بیان کرد؟

پاسخ

الف) چون $f(x)$ نقش عرض نقاط نمودار را دارد، با قرینه شدن آن، نقاط نسبت به محور طول قرینه می‌شوند. پس:

برای رسم $y=-f(x)$ ، باید نمودار f نسبت به محور طول قرینه گردد.

نتیجه چنین است:



ب) می‌دانیم قدرمطلق فقط عددهای منفی را قرینه می‌کند؛ پس تأثیر قدرمطلق در $|f(x)|$ چنین است:

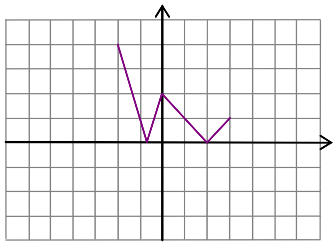
هر جا $f(x)$ منفی باشد، قدرمطلق آن را به $-f(x)$ تبدیل خواهد کرد، یعنی: قرینه نسبت به محور طول.

بنابراین:

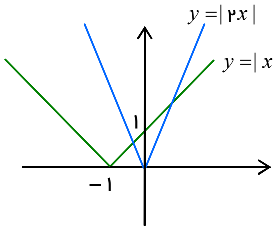
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ ، دو مورد را رعایت می‌کنیم:

- قسمت‌هایی از نمودار $f(x)$ که زیر محور عرض قرار دارد (یعنی: $f(x)<0$)، نسبت به محور طول قرینه می‌شود.
- سایر قسمت‌های نمودار $f(x)$ ، در رسم نمودار $|f(x)|$ بدون تغییر باقی می‌ماند.

در این مثال:



نمونه‌هایی دیگر:

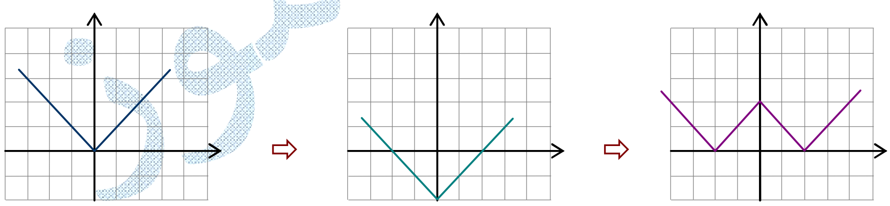


- نمودارهای تقریبی $|y=|x+۱$ و $|y=|۲x$ را در شکل مقابل می‌بینید.

توجه کنید:

طبق نمودارها، معادله‌ی $|۲x|=|x+۱|$ دارای دو جواب مثبت و منفی است.

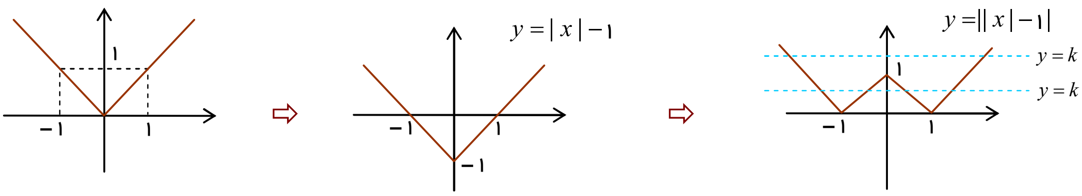
- رسم نمودار $y=||x|-۲|$ را در طی سه مرحله می‌بینید:



مثال: معادله‌ی $||x|-۱|=k$ بیش از دو جواب دارد. حدود k را تعیین کنید.

پاسخ

نمودار تابع $|y=||x|-۱$ را مشابه بالا رسم کرده و همچنین خطهای افقی $y=k$ را در نظر می‌گیریم:



مقدار k وقتی قبول است که خط افقی $y=k$ نمودار تابع را در بیشتر از دو نقطه قطع کند.

فقط برای $k\in(۰,۱]$ تعداد برخوردها بیشتر از ۲ نقطه است.

پاسخ دهید (۵)

۱- معادله‌ی $\frac{۲-x}{|x-۳|}=۱$ را حل کنید.

۲- به روش هندسی:

الف) معادله‌ی $|x+۱|=x^۲-۴x+۳$ را حل کنید.

ب) نامعادله‌ی $|x-۲|\leq\frac{۱}{۲}x+۲$ را حل کنید.

۳- نمودار تابع $f(x)=||x|-۳|$ را رسم کرده و به کمک آن معادله‌ی $f(x)=۲$ را حل کنید. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲)

۴- در مورد تابع $f(x)=|x^۲-۲x|$:

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) ابتدا تعداد جواب‌های معادله‌ی $f(x)=۲$ را به روش هندسی و سپس جواب‌ها را به روش جبری تعیین کنید.

منتخب کتاب:

۱- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $|x-۱|=x^۲-x-۱$ را به روش هندسی مشخص کنید.

۲- با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی توابع $f(x)=x|x|$ و $g(x)=|x^۲-۱|$ را بدون قدرمطلق بنویسید.

۳- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های -۱ و ۳ روی این محور برابر ۶ باشد؟

۴- معادله‌ی $\sqrt{x^۲-۲x+۱}=۲x+۱$ را حل کنید.

۵- نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس معادله‌های به‌دست آمده به ازای $y=۳$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\frac{x}{|x|}$ ب) $y=x^۲-۶x$

۶- نمودار $f(x)=||x|-۲|$ را رسم کنید و سپس معادله‌ی $f(x)=۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

چند عدد صحیح منفی در مجموعه جواب معادله‌ی $|x^۲+x-۴|=|x^۲+۳x+۵|+|۲x+۹|$ قرار ندارند؟

۶ هندسه تحلیلی

در این بخش، مطالب ضروری در مورد مختصات نقاط و معادلات خط‌ها که در مباحث درسی بعدی فراوان به‌کار خواهند رفت، را می‌بینیم.

فاصله‌ی نقاط:

اگر نقاط $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ در صفحه داده شوند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

(دلیل این رابطه با نمایش نقاط در دستگاه و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

حالت‌های خاص:

- اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_۱ = x_۲$، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(y_۲ - y_۱)^۲} = |y_۲ - y_۱|$$

- اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_۱ = y_۲$، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲} = |x_۲ - x_۱|$$

- فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ سریع محاسبه می‌گردد:

$$OA = \sqrt{(x_۱ - ۰)^۲ + (y_۱ - ۰)^۲} = \sqrt{x_۱^۲ + y_۱^۲}$$

مثال: (مشابه کتاب) نشان دهید نقطه‌ی $M(۵, -۵)$ روی عمود منصف پاره‌خط AB با نقاط $A(-۲, ۱)$ و $B(۳, ۴)$ قرار دارد.

پاسخ

از خاصیت شناخته شده‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط است هرگاه فاصله‌ی آن تا دو سر پاره‌خط یکسان باشد.

پس کافی است $MA = MB$ باشد:

$$MA = \sqrt{(-۲ - ۵)^۲ + (۱ + ۵)^۲} = \sqrt{۴۹ + ۳۶} = \sqrt{۸۵}$$

$$MB = \sqrt{(۳ - ۵)^۲ + (۴ + ۵)^۲} = \sqrt{۴ + ۸۱} = \sqrt{۸۵}$$

مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(۱, ۲)$، $B(۲, -۱)$ و $C(-۱, -۱)$ داده شده است.

الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟

ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

پاسخ

الف) طول سه ضلع را تعیین می‌کنیم:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$
$$AC=\sqrt{(-1-1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$
$$BC=\sqrt{(-1-2)^2+(-1+1)^2}=\sqrt{9+0}=3$$

پس: ضلع‌ها نابرابرند.

ب) قائم‌الزاویه بودن مثلث، طبق رابطه‌ی فیثاغورس بررسی می‌شود؛ باید ضلع بزرگ‌تر وتر باشد:

$$(\sqrt{13})^2=13 \qquad و \qquad (\sqrt{10})^2+(3)^2=10+9=19$$

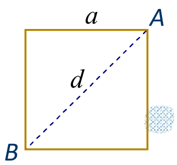
چون $19\neq 13$، در نتیجه مثلث قائم‌الزاویه هم نیست.

---✧---

مثال: اگر $A(4,4)$ و $B(1,1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:



$$d=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

می‌دانیم: بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d=a\sqrt{2}$ وجود دارد و در نتیجه:

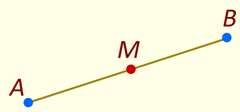
$$a=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \Rightarrow S=a^2=\frac{18}{2}=9$$

---✧---

وسط پاره‌خط:

اگر نقاط $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:

$$M(x_M,y_M):\begin{cases} x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\[2ex] y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$$



مثال: اگر $A(4,5)$ و $B(2,1)$، طول میانه‌ی OM در مثلث OAB را حساب کنید.

پاسخ

نقطه‌ی M وسط ضلع AB است و بنابراین مختصات آن عبارت است از:

$$x_M=\frac{2+4}{2}=3 \quad , \quad y_M=\frac{1+5}{2}=3 \quad \rightarrow M(3,3)$$

در نتیجه طول میانه‌ی OM همان فاصله‌ی M از نقطه‌ی O (یعنی مبدأ) برابر است با:

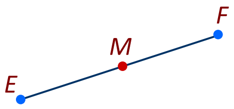
$$OM=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=\sqrt{9\times 2}=3\sqrt{2}$$

در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $E(۱,۲)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-۱,۴)$ را مشخص کنید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.

پاسخ



الف) اگر $F(a,b)$ قرینه‌ی E باشد، باید M نقطه‌ی وسط E و F باشد:

$$x_M=\frac{x_E+x_F}{۲}\to -۱=\frac{۱+a}{۲}\Rightarrow a=-۳ \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_E+y_F}{۲}\to ۴=\frac{۲+b}{۲}\Rightarrow b=۶$$

در نتیجه $F(-۳,۶)$ است.

ب) اگر قرینه را $Q(r,s)$ بگیرید، به صورت مشابه، باید $O(۰,۰)$ نقطه‌ی وسط P و Q باشد:

$$۰=\frac{\alpha+r}{۲}\to \alpha+r=۰\Rightarrow r=-\alpha \quad \text{و} \quad ۰=\frac{\beta+s}{۲}\to \beta+s=۰\Rightarrow s=-\beta$$

نتیجه:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha,\beta)$ نسبت به مبدأ به صورت $Q(-\alpha,-\beta)$ تعیین می‌شود.

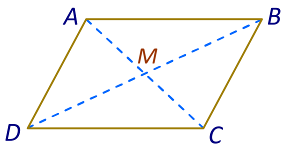
مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را نشان دهید:

$$x_A+x_C=x_B+x_D \quad \text{و} \quad y_A+y_C=y_B+y_D$$

در نتیجه:

اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می‌توان مشخص کرد.

پاسخ



از این خاصیت استفاده می‌کنیم:

در متوازی الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

پس نقطه‌ی M وسط هر دو قطر AC و BD بوده و بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} x_M&=\frac{x_A+x_C}{۲}\\ x_M&=\frac{x_B+x_D}{۲}\end{aligned}\right\}\to \frac{x_A+x_C}{۲}=\frac{x_B+x_D}{۲}\xrightarrow{\times ۲} x_A+x_C=x_B+x_D$$

به روش مشابه، عرض نقاط هم خاصیت گفته شده را دارد.

شیبِ خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت (یعنی: تقسیم) تغییر عرض‌ها به تغییر طول‌ها را شیب آن خط می‌گویند.

در نتیجه:

اگر دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط داده شوند، شیب خط چنین به‌دست می‌آید:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

بعلاوه:

اگر معادله‌ی خط را به صورت منظم بنویسیم، یعنی:

y با ضریب $+1$ در یک سمت و بقیه‌ی عبارات در سمت دیگر معادله باشند.

در این صورت:

همیشه «ضریب x برابر شیب خط» و «عدد ثابت برابر عرض از مبدأ» خواهد شد.

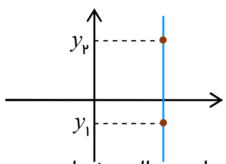
برای نمونه؛

در خط $3x - 6y = 1$، شیب برابر $m = \frac{1}{2}$ و عرض از مبدأ برابر $q = -\frac{1}{6}$ است. زیرا:

$$3x - 6y = 1 \rightarrow -6y = -3x + 1 \xrightarrow{\div(-6)} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$$

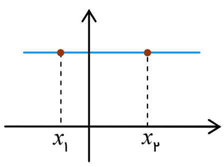
حالت‌های خاص:

- در محاسبه‌ی شیب، اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_2 = x_1$، مقدار $m = \frac{y_2 - y_1}{0}$ تعریف نشده است. این حالت فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:



پس: در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

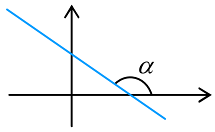
- اگر عرض‌ها برابر باشند: $y_2 = y_1$، آنگاه شیب برابر $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خط‌های افقی رخ می‌دهد:



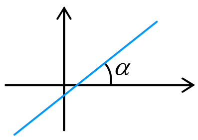
پس: شیب هر خط افقی برابر صفر است.

به یاد داشته باشید:

شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است.



شیب منفی $m = \tan\alpha$



شیب مثبت $m = \tan\alpha$

در نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب خط: m و **مختصات یک نقطه روی آن:** (x_0, y_0)

با این داشته‌ها:

معادله‌ی خط چنین نوشته خواهد شد:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

زیرا:

اگر (x,y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب خط باید:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: خط گذرا از نقطه‌ی $(-1,2)$ و موازی خط $l: 3x - y = 1$، محور x را با کدام طول قطع می‌کند.

پاسخ

شیب خط l برابر $+3$ است و در نتیجه خط مورد نظر هم شیب $+3$ دارد. معادله‌ی آن:

$$y - 2 = 3(x - (-1)) \Rightarrow y = 3x + 5$$

در نقطه‌ی تقاطع خط با محور طول، باید $y = 0$ باشد:

$$y = 0: \ 0 = 3x + 5 \rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

خط‌های عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m \times m' = -1 \quad \Rightarrow \quad m' = -\frac{1}{m}$$

به عبارت دیگر:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا m' حاصل شود.

مثال: خطی گذرنده از نقطه‌ی $(1,-2)$ و عمود بر خط $2y + x = 1$، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند.

پاسخ

شیب خط داده شده برابر $m = -\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید و در نتیجه شیب خط عمود بر آن چنین محاسبه می‌شود:

$$-\frac{1}{2} \times m' = -1 \rightarrow m' = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \rightarrow m' = 2$$

پس معادله‌ی آن خط با استفاده از نقطه‌ی داده شده نوشته می‌شود:

$$y - (-2) = 2(x-1) \rightarrow y + 2 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 4$$

در نقطه‌ی تقاطع این خط با محور عرض، باید $x = 0$ باشد:

$$x = 0: \quad y = 2(0) - 4 \Rightarrow y = -4$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

نقاط $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید.

پاسخ

چون $BA \perp BC$ است، شرط $m_{BA} \times m_{BC} = -1$ را به‌کار می‌بریم:

$$\frac{2-0}{4-1} \times \frac{-k-0}{k-1} = -1 \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{k}{k-1} = 1 \rightarrow 2k = 3(k-1) \rightarrow 2k - 3k = -3 \Rightarrow k = \frac{-3}{-1} = 3$$

مثال: مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(5,1)$ و $B(10,4)$ داده شده است.

الف) معادله‌ی ضلع AB را بنویسید.

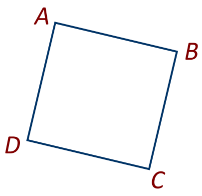
ب) با استفاده از (الف)، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

پاسخ

الف) معادله‌ی ضلع توسط شیب و نقطه‌ی A نوشته می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\dfrac{۴-۱}{۱۰-۵}=\dfrac{۳}{۵} \\ (\underbrace{۵}_{x_۰},\underbrace{۱}_{y_۰}) \end{array}\right\} \Rightarrow\ y-۱=\frac{۳}{۵}(x-۵)\ \xrightarrow{\times ۵}\ ۵y-۵=۳x-۱۵\ \Rightarrow\ -۳x+۵y=-۱۰$$

ب) چون ضلع AD بر ضلع AB عمود است، شیب آن با معکوس و قرینه کردن $\frac{۳}{۵}$ حاصل می‌شود:



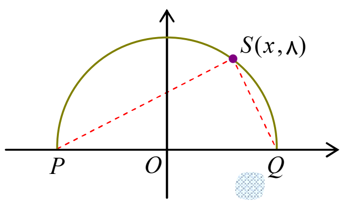
$$m_{AB}=\frac{۳}{۵}\ \Rightarrow\ m_{AD}=-\frac{۵}{۳}$$

اکنون معادله‌ی ضلع AD:

$$y-۱=-\frac{۵}{۳}(x-۵)\ \xrightarrow{\times ۳}\ ۳y-۳=-۵x+۲۵\ \Rightarrow\ ۵x+۳y=۲۸$$

مثال: (از کتاب با تغییر)

نقطه‌ی $S(x,۸)$ روی نیم دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد مطابق شکل داده شده است. مختصات S را مشخص کنید. سپس به دو روش زیر نشان دهید مثلث PSQ قائم الزاویه است:



الف) رابطه‌ی فیثاغورس   ب) شیب خط‌ها

پاسخ

فاصله‌ی S تا مبدأ برابر شعاع دایره است:

$$\sqrt{x^۲+۸^۲}=۱۰\ \rightarrow\ x^۲+۶۴=۱۰۰\ \rightarrow\ x^۲=۳۶\ \xrightarrow{x>۰}\ x=\sqrt{۳۶}=۶$$

پس $S(۶,۸)$ بوده است.

الف) با توجه به شعاع دایره، $P(-۱۰,۰)$ و $Q(۱۰,۰)$ بوده‌اند و $PQ=۲\times۱۰=۲۰$ است. تعیین طول اضلاع:

$$PS=\sqrt{(-۱۰-۶)^۲+(۰-۸)^۲}=\sqrt{۲۵۶+۶۴}=\sqrt{۳۲۰}$$

$$QS=\sqrt{(۱۰-۶)^۲+(۰-۸)^۲}=\sqrt{۱۶+۶۴}=\sqrt{۸۰}$$

چون $PS^۲+QS^۲=۳۲۰+۸۰=۴۰۰$ و $PQ^۲=۴۰۰$ است، رابطه‌ی فیثاغورس برقرار بوده و $P\hat{S}Q=۹۰^\circ$ است.

ب) کافی‌است ضرب شیب‌های PS و QS برابر -۱ شود که همین‌طور است:

$$m_{PS}\times m_{QS}=\frac{۸-۰}{۶-(-۱۰)}\times\frac{۸-۰}{۶-۱۰}=\frac{۸}{۱۶}\times\frac{۸}{-۴}=\frac{۶۴}{-۶۴}=-۱$$

مقایسه‌ی خطوط:

اگر معادلات دو خط به صورت استاندارد $ax+by+c=۰$ و $a'x+b'y+c'=۰$ نوشته شوند، آنگاه دو خط:

- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خط‌ها متقاطع‌اند.
- بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.
- بر هم عمودند، هرگاه: $aa'+bb'=۰$.

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه معادلات $\begin{cases} mx+y=m-۱ \\ ۳x+(m-۲)y=۴-۲m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد.

پاسخ

باید خط‌های متناظر بر هم منطبق باشند. طبق مطلب قبل:

$$\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}=\frac{m-۱}{۴-۲m}$$

از حل معادله‌ی $\frac{m}{۳}=\frac{۱}{m-۲}$ مقادیر $m=-۱$ و $m=۳$ به‌دست می‌آیند. هر مقداری که تساوی خط بالا را به صورت کامل برقرار سازد، جواب مسأله است:

$$m=۳:\ \frac{۳}{۳}=\frac{۱}{۳-۲}\neq\frac{۳-۱}{۴-۶} \quad \text{و} \quad m=-۱:\ \frac{-۱}{۳}=\frac{۱}{-۱-۲}=\frac{-۱-۱}{۴+۲}$$

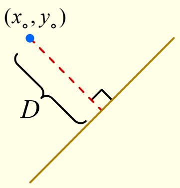
بنابراین فقط عدد -۱ قابل قبول است.

فاصله‌ی نقطه تا خط:

باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax+by+c=۰$ نوشت. سپس:

فاصله‌ی یک نقطه‌ی $(x_۰,y_۰)$ از این خط برابر است با:

$$D=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$



بویژه:

فاصله‌ی مبدأ مختصات $(۰,۰)$ تا این خط برابر است با:

$$\boxed{\frac{|c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}}$$

توجه کنید که فاصله‌ی نقطه تا خط:

- همان طول پاره‌خط عمود رسم شده از نقطه به خط است.
- کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است.

مثال: دو خط $l_۱:\ ۲x+y=-۱$ و $l_۲:\ -x+۲y=-۷$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(۷,۹)$ از خط $l_۲$ را به‌دست آورید.

پاسخ

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\left.\begin{matrix} ۲x+y=-۱ \\ -x+۲y=-۷ \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} ۲x+y=-۱ \\ -۲x+۴y=-۱۴ \end{matrix}\right\} \to ۵y=-۱۵ \Rightarrow y=-۳$$

جایگذاری -۳ در یکی از معادلات به جای y:

$$۲x-۳=-۱ \Rightarrow x=۱$$

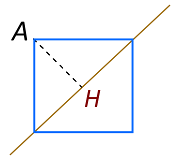
ب) خط $l_۲$ را استاندارد کرده و فرمول بالا را در مورد نقطه‌ی $C(۷,۹)$ بکار می‌بریم:

$$-x+۲y+۷=۰ \Rightarrow \frac{|-(۷)+۲(۹)+۷|}{\sqrt{(-۱)^۲+(۲)^۲}}=\frac{|۱۸|}{\sqrt{۵}}=\frac{۱۸}{\sqrt{۵}}$$

---✧---

مثال: نقطه‌ی $A(۲,۳)$ رأس مربعی است که خط $۲x+y-۲=۰$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ



با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از قطر مربع، نصف طول قطر را به‌دست می‌دهد:

$$AH=\frac{|۲(۲)+۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{|۵|}{\sqrt{۵}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

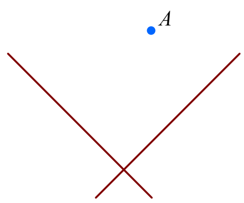
پس قطر مربع $d=۲\sqrt{۵}$ است. با استفاده از رابطه‌ی $d=a\sqrt{۲}$ بین ضلع و قطر، طول ضلع مربع $a=\frac{d}{\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}$ بوده و بنابراین مساحت مربع برابر است با:

$$S=a^۲=\left(\frac{۲\sqrt{۵}}{\sqrt{۲}}\right)^۲=\frac{۴\times ۵}{۲}=۱۰$$

---✧---

مثال: (از کتاب) دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل هستند و $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل را حساب کنید.

پاسخ



چون دو خط موازی نیستند (شیب‌ها نابرابرند) و نقطه‌ی A روی هیچ‌کدام از خطها قرار ندارد (چون مختصات A در خطها صادق نیست)، پس شکل مربوطه تقریباً به صورت روبه‌رو است:

نتیجه:

فاصله‌ی A از دو خط، طول و عرض مستطیل را مشخص می‌کند:

$$۳x+۲y-۱=۰ \Rightarrow \frac{|۳(۲)+۲(۵)-۱|}{\sqrt{(۳)^۲+(۲)^۲}}=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}} \quad \text{(طول مستطیل)}$$

$$۲x-۳y-۲=۰ \Rightarrow \frac{|۲(۲)-۳(۵)-۲|}{\sqrt{(۲)^۲+(-۳)^۲}}=\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}} \quad \text{(عرض مستطیل)}$$

پس مساحت برابر است با:

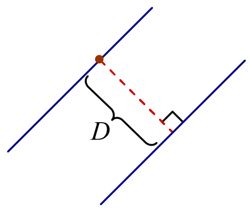
$$S=\frac{۱۵}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۱۳}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۱۵\times ۱۳}{۱۳}=۱۵$$

---✧---

فاصله دو خط موازی:

دو روش برای محاسبه‌ی این فاصله وجود دارد:

روش اول:



فاصله‌ی مورد نظر برابر فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواهی روی یکی از خطها تا خط دیگر است.

روش دوم:

با ضرب معادلات دو خط در عددهای مناسبی، آن‌ها را به صورت مشابه $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ بنویسید. آنگاه فاصله‌ی دو خط برابر است با:

$$\boxed{D=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

دلیل:

طبق روش اول، نقطه‌ای روی خط دوم انتخاب می‌کنیم:

$$y=0 \rightarrow x=-\frac{c'}{a} \Rightarrow (-\frac{c'}{a},0)$$

کافی است فاصله این نقطه تا خط اول را حساب کنیم:

$$\frac{|a(-\frac{c'}{a})+b(0)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|-c'+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط $x+2y=1$ و $y=2-\frac{x}{2}$ را حساب کنید.

پاسخ

دو خط داده شده شیب برابر دارند:

$$y=2-\frac{x}{2} \quad \text{و} \quad x+2y=1 \xrightarrow{\div 2} y=\frac{1}{2}-\frac{x}{2}$$

پس موازی هستند. به روش دوم در بالا:

$$\begin{cases} x+2y-1=0 \\ y=2-\frac{x}{2} \xrightarrow{\times 2} x+2y-4=0 \end{cases} \Rightarrow D=\frac{|-1-(-4)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

مثال: معادلات دو ضلع یک مربع به صورت $2x+3y=-4$ و $4x+6y+m=0$ است. اگر مساحت مربع $\frac{9}{13}$ باشد، مقدار m را حساب کنید.

پاسخ

چون دو ضلع داده شده موازی هستند، فاصله‌ی آن‌ها برابر ضلع مربع است. به روش بالا:

$$\left.\begin{matrix} 4x+6y+8=0 \\ 4x+6y+m=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=\frac{|m-8|}{\sqrt{4^2+6^2}}=\frac{|m-8|}{\sqrt{52}}$$

پس مساحت برابر $S=a^{2}=\dfrac{(m-8)^{2}}{52}$ بوده است. طبق فرض:

$$\frac{(m-8)^{2}}{52}=\frac{9}{13}\ \rightarrow\ (m-8)^{2}=\frac{9\times 52}{13}=9\times 4=36$$

$$\rightarrow\ m-8=\pm 6\ \rightarrow\begin{cases} m-8=6\ \Rightarrow\ m=14\\ m-8=-6\ \Rightarrow\ m=2\end{cases}$$

پاسخ دهید (۶)

۱- نقطه‌ی $P(4-3m,2m-6)$ روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد. فاصله‌ی P از مبدأ را بیابید.

۲- سه خط $\begin{cases}x+y=7\\ 2x-4y+10=0\\ (k+1)x-ky=0\end{cases}$ در یک نقطه متقارب‌اند (یعنی هر سه در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند!). k را بیابید.

راهنمایی: نقطه‌ی تقاطع دو خط اول را تعیین کنید؛ خط سوم نیز باید از این نقطه عبور کند!

۳- مثلث با رأس‌های $A(-1,2)$، $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ داده شده است.

الف) آیا این مثلث متساوی‌الساقین است؟

ب) معادله‌ی میانه‌ی AM را نوشته و طول آن را حساب کنید.

۴- نشان دهید نقطه‌ی $C(-12,11)$ روی عمود منصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(0,-3)$ و $B(6,15)$ قرار دارد.

۵- معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB با نقاط $A(-2,1)$ و $B(3,4)$ را به دو روش بنویسید:

الف) تعیین شیب و نقطه‌ای روی آن　　ب) فرمول فاصله‌ی دو نقطه در صفحه

۶- هرگاه $A(2,-2)$ و $C(3,2)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، معادله‌ی قطر BD را بنویسید.

۷- خط d به معادله‌ی $2y+x=5$ و نقطه‌ی $A(4,3)$ داده شده است. از نقطه A عمود AH را بر خط وارد کرده‌ایم.

الف) شیب AH را حساب کرده و معادله‌ی خط AH را بنویسید.

ب) مختصات نقطه‌ی H را توسط حل دستگاه تعیین کنید.

پ) طول AH را به دو روش حساب کنید.

۸- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1,2)$ از خط به معادله‌ی $ax+4y=1$ برابر ۲ است. مقدار a را بیابید.

۹- فاصله‌ی دو خط موازی به معادله‌های $y=x+1$ و $y=x+2$ را حساب کنید.

منتخب کتاب:

۱- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(0,6)$ و $B(8,-8)$ هستند. اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

۲- خط $4x+3y=5$ بر دایره‌ی به مرکز $O(-1,2)$ مماس است. طول شعاع دایره را بیابید.

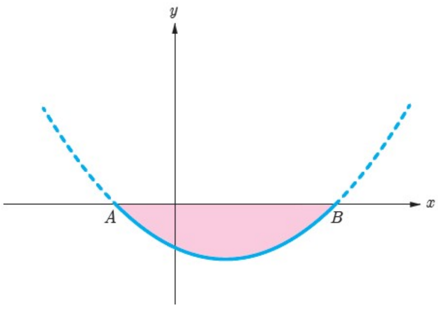
۳- نقاط $A(-11,-13)$، $B(-3,3)$ و $C(3,1)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B در میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی الاضلاع باشد.

۴- نقطه‌ای روی خط $y=2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2,4)$ برابر ۵ باشد.

۵- شکل نمای جانبی یک عدسی از منحنی $y=x^2-8x-20$ به صورت روبه‌رو داده شده است: (A و B نقاط انتهایی عدسی هستند.)



اگر عدسی کاملاً متقارن و y بر حسب میلی‌متر باشد، بیشترین ضخامت عدسی را حساب کنید.

۶- نقاط $A(4,2)$، $B(1,-1)$ و $C(8,-2)$ سه رأس مثلث ABC و نقاط H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه‌ی AM روی ضلع BC هستند. طول MH را حساب کنید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

اگر دو ضلع یک شش ضلعی منتظم روی خط‌های $x+y=4$ و $2x+2y=1$ واقع باشند، مساحت شش ضلعی را حساب کنید.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴