۱۲

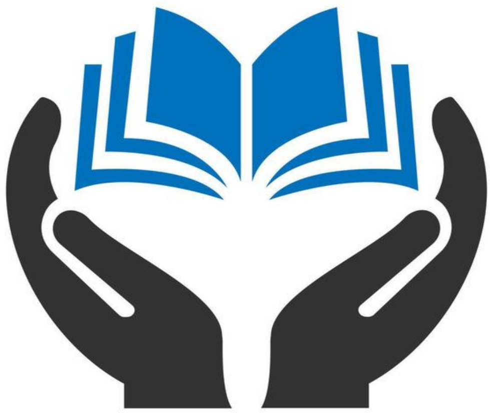
آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

هندسه دوازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

ساختار جدید

بهینه شده ویژه نهایی

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

هندسه دوازدهم

۱

ماتریس (۱)

فهرست	صفحه

۱ مفاهیم پایه

به تعریف ماتریس و چند مفهوم مقدماتی مربوط به آن توجه کنید.

ماتـــریس:

هرگاه تعدادی عدد در یک آرایش سطری و ستونی قرار گیرند، یک «**ماتریس**» تشکیل داده و به هر یک از آن اعداد، یک «**درایه**» گفته می‌شود. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}$$

بعلاوه:

- به درایه‌هایی که در یک ردیف افقی قرار دارند، یک «**سطر**» گفته و سطرها را از بالا به پایین می‌شماریم.
- به درایه‌هایی که در یک ردیف عمودی قرار دارند، «**ستون**» ماتریس گویند و آن‌ها را از چپ به راست ستون اول، ستون دوم و . . . نام‌گذاری می‌کنیم.
- ماتریس‌ها با حروف بزرگ A، B، C و . . . نام‌گذاری می‌شوند.

سطر و ستون‌های ماتریس مقابل را ببینید:

$$\begin{array}{cc} A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \end{array} & \end{array}$$

ماتریس بالا دارای ۲ سطر و ۳ ستون است و آن را از «**مرتبه‌ی** ۲×۳» می‌نامیم. ضمناً، ماتریس‌هایی که تعداد سطر و تعداد ستون یکسان دارند، «**هم مرتبه**» نامیده می‌شوند. مانند:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۴ & ۰ \\ ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

در کل:

درایه‌ی واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A را با $a_{i,j}$ (یا a_{ij}) نشان می‌دهیم؛ بنابراین نمایش کلی یک ماتریس با m سطر و n ستون (یعنی: از مرتبه‌ی $m\times n$) به صورت زیر خواهد بود:

$$A_{m\times n}=[a_{i,j}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} a_{۱,۱} & a_{۱,۲} & \cdots & a_{۱,n} \\ a_{۲,۱} & a_{۲,۲} & \cdots & a_{۲,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,۱} & a_{m,۲} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

حالت خاص:

اگر ماتریس از مرتبه‌ی ۱×۱ باشد، فقط یک درایه دارد؛ در این صورت ماتریس را با همان درایه یکی می‌گیریم. مانند:

$$B=[-۲]=-۲$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۵ & ۹\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

- در ماتریس B، درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم عبارت است از $b_{۲,۳}=۹$ و به‌طور مشابه در ماتریس A داریم: $a_{۱,۲}=۳$.
- سطر دوم ماتریس B عبارت است از $[۲\quad ۵\quad ۹]$ و ستون اول ماتریس A به صورت $\begin{bmatrix}-۱\\ ۵\end{bmatrix}$ می‌باشد.

مثال: ماتریس $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ به صورت زیر داده شده است:

$$b_{ij}=\begin{cases}۳i-۲ & i<j\\ -i^۲+۲j & i\geq j\end{cases}$$

ماتریس را تشکیل داده و مجموع درایه‌های سطر دوم آن را حساب کنید.

پاسخ

هر یک از درایه‌ها را طبق ضابطه‌ی مربوطه مشخص می‌کنیم:

$$b_{۱,۱}=-(۱)^۲+۲(۱)=۱ \qquad b_{۱,۲}=۳(۱)-۲=۱ \qquad b_{۱,۳}=۳(۱)-۲=۱$$

$$b_{۲,۱}=-(۲)^۲+۲(۱)=-۲ \qquad b_{۲,۲}=-(۲)^۲+۲(۲)=۰ \qquad b_{۲,۳}=۳(۲)-۲=۴$$

در نتیجه، ماتریس به صورت $B=\begin{bmatrix}۱ & ۱ & ۱\\ -۲ & ۰ & ۴\end{bmatrix}$ بوده و مجموع خواسته شده برابر است با:

$$-۲+۰+۴=۲$$

چند مفهوم:

اگر تعداد سطرها و ستون‌های ماتریس A یکسان و برابر عدد n باشد، آن را یک ماتریس **«مربعی»** از مرتبه‌ی n گوئیم.

نمونه‌ها:

ماتریس مربعی مرتبه ۲: $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$ ماتریس غیرمربعی: $B=\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۴ & ۰\\ ۱ & ۷\end{bmatrix}$

- در هر ماتریس مربعی، درایه‌هایی که شماره‌ی سطر و ستون یکسان دارند، **«قطر اصلی»** ماتریس را تشکیل می‌دهند. قطر دیگر ماتریس، قطر فرعی آن است.
- ماتریس مربعی که تمام درایه‌های خارج قطر اصلی آن صفر باشند، **«ماتریس قطری»** نام دارد.

نمونه‌ها:

ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

قطر فرعی

قطر اصلی

- در یک ماتریس قطری، اگر تمام درایه‌های قطر اصلی یکسان باشند، به آن «**ماتریس اسکالر**» گوئیم.

نمونه‌ها:

$$B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

شکل کلی ماتریس اسکالر: (c عدد ثابت)

$$A=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{و} \; ...$$

حالت ویژه:

هر گاه در ماتریس اسکالر، تمام درایه‌های قطر اصلی برابر یک باشند، به آن «**ماتریس همانی**» یا «**ماتریس واحد**» گفته می‌شود. ماتریس همانی مرتبه‌ی ۲ را با I_2، ماتریس همانی مرتبه‌ی ۳ را با I_3 و ... نشان می‌دهیم.

ماتریس همانی: $I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر هستند را «**ماتریس صفر**» گفته و در کل با $\overline{O}$ نشان می‌دهیم؛ مانند:

ماتریس صفر 3×3 $\overline{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس صفر 2×2 $\overline{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

واضح است که مانند ماتریس واحد، ماتریس صفر هم از هر مرتبه‌ای وجود دارد و بنابراین:

بی‌شمار ماتریس صفر (و همچنین: ماتریس همانی) گوناگون وجود دارد.

توجه:

تفاوت نمادهای نوشتاری عدد صفر: ۰ و ماتریس صفر: $\overline{O}$ را در نظر داشته باشید!

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر ...... است.

پاسخ

باید داشته باشیم: $r=1$ و $m=1$ $\Leftarrow$ $m-1=0$. بنابراین:

$$m+r=1+1=2$$

مثال: در ماتریس $M=[m_{ij}]_{۳\times۳}$ با درایه‌های $m_{ij}=-۲ij+j^۲$، مطلوب است:

الف) مجموع درایه‌های قطر اصلی.

ب) مجموع درایه‌های قطر فرعی.

پاسخ

الف) باید درایه‌های دارای شماره سطر و ستون یکسان را حساب کرده و جمع کنیم:

$$m_{۱۱}=-۲(۱\times۱)+۱^۲=-۲+۱=-۱\ ,\ m_{۲۲}=-۲(۲\times۲)+۲^۲=-۴\ ,\ m_{۳۳}=-۲(۳\times۳)+۳^۲=-۹$$
$$\Rightarrow\ -۱-۴-۹=-۱۴$$

ب) درایه‌های قطر فرعی $m_{۱۳}$، $m_{۲۲}$ و $m_{۳۱}$ هستند:

$$m_{۱۳}=-۲(۱\times۳)+۳^۲=۳\ ,\ m_{۳۱}=-۲(۳\times۱)+۱^۲=-۵\quad\Rightarrow\quad ۳-۴-۵=-۶$$

تساوی ماتریس‌ها:

دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی A و B (یعنی: تعداد سطر و ستون یکسان) را «**برابر**» گفته و می‌نویسیم: $A=B$، هرگاه:

درایه‌های نظیر در دو ماتریس برابر باشند.

(پس اگر ماتریس‌ها هم مرتبه نباشند، تساوی آن‌ها ممکن نیست. برای نمونه: $I_۲\neq I_۳$)

به صورت نمادین:

$$[a_{i,j}]_{m\times n}=[b_{i,j}]_{m\times n}\quad\Leftrightarrow\quad(\forall i,j:\quad a_{i,j}=b_{i,j})$$

مثال: از تساوی زیر، مقدار $m-۲n+۳p-۴q$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۲n^۲ & m^۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹p & ۴q \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ

مشابه قبل، باید درایه‌های متناظر برابر قرار گیرند:

$$۳=۹p\ \Rightarrow\ p=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}\qquad\qquad -۳=۴q\ \Rightarrow\ q=-\frac{۳}{۴}$$
$$۲n^۲=۲\ \to\ n^۲=۱\ \Rightarrow\ n=\pm۱\qquad\qquad m^۳=۱\ \Rightarrow\ m=۱$$

در نتیجه، برای عبارت داده شده دو جواب وجود دارد؛ یکی در حالت $n=۱$ و دیگری در حالت $n=-۱$:

$$n=۱:\quad m-۲n+۳p-۴q=۱-۲(۱)+۳(\frac{۱}{۳})-۴(-\frac{۳}{۴})=۱-۲+۱+۳=۳$$

$$n=-۱:\quad m-۲n+۳p-۴q=۱-۲(-۱)+۳(\frac{۱}{۳})-۴(-\frac{۳}{۴})=۱+۲+۱+۳=۷$$

مثال: دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x+y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ برابر هستند. مقدار $x+y+z$ را بیابید.

پاسخ

درایه‌های متناظر را برابر قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} ۲x=۳ \rightarrow x=\frac{۳}{۲} \\ ۲x+y=۵ \xrightarrow{۲x=۳} y=۵-۳=۲ \\ z=-۲ \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z=\frac{۳}{۲}+۲-۲=\frac{۳}{۲}$$

پاسخ دهید (۱)

۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ ماتریسی ۳×۴ باشد به طوری که برای $i=j$ داشته باشیم $a_{ij}=۳$، برای $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=i+j$ و برای $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=i^۲-۱$، ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۲- دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۷ & n \\ ۴ & ۲m \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۷ & m-n \\ ۴ & n+۳ \end{bmatrix}$ برابرند. مقدار $m+۲n$ را بیابید.

۲ جمع ماتریس‌ها

بسیاری از محاسبات مانند جمع، تفریق و . . . که با عددها انجام می‌دهیم را می‌توان با ماتریس‌ها هم انجام داد.

جمع و تفریق:

برای دو ماتریس هم‌مرتبه‌ی $A=[a_{i,j}]_{m\times n}$ و $B=[b_{i,j}]_{m\times n}$، در تعیین ماتریس‌های $A+B$ و $A-B$، درایه‌های نظیر در A و B با هم جمع یا کم می‌شوند:

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n} \quad \text{و} \quad A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$$

برای نمونه؛

$$\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۵ & ۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱-۱ & ۰-۲ & ۴+۱\\ ۲-۰ & ۵-۳ & ۹+۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -۲ & ۵\\ ۲ & ۲ & ۱۱\end{bmatrix}$$

توجه کنید:

- اگر دو ماتریس هم‌مرتبه نباشند، جمع یا تفریق آن‌ها تعریف و انجام نمی‌شود.
- بعلاوه، مرتبه‌ی $A\pm B$ در صورت تعریف شدن، همان مرتبه‌ی A و B است.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۵ & ۴\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۰ & ۴\\ ۲ & ۵ & ۹\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۱\\ ۰ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ داده شده باشند، آنگاه:

$$C+B=\begin{bmatrix}۱-۱ & ۲+۰ & -۱+۴\\ ۰+۲ & ۳+۵ & -۲+۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۳\\ ۲ & ۸ & ۷\end{bmatrix}$$

ولی عبارت‌های $A+B$ و $A-B$ بی معنی هستند.

موارد زیر به آسانی از ویژگی‌های معمولی عددها نتیجه می‌شوند.

ویژگی‌های جمع:

اگر A، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه باشند:

- همواره $A+B=B+A$ است، یعنی جمع ماتریس‌ها جابجایی است؛ ولی: $A-B\neq B-A$.
- اگر $\overline{O}$ ماتریس صفر هم‌مرتبه‌ی A باشد، آنگاه: $A+\overline{O}=\overline{O}+A=A$. ($\overline{O}$ عضو خنثی برای جمع)
- خاصیت شرکت‌پذیری برقرار است:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

عددها به آسانی و به صورت معمولی در هر ماتریسی ضرب می‌شوند.

ضرب عددی:

اگر $A=[a_{i,j}]_{m\times n}$ یک ماتریس و r عددی دلخواه باشد، ماتریس rA ماتریسی هم‌مرتبه‌ی A است که از ضرب عدد r در تمام درایه‌های ماتریس A به‌دست می‌آید:

$$rA=[ra_{ij}]_{m\times n}$$

برای نمونه؛

$$-۲\times\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۰\\ ۴ & ۵ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۲ & ۰\\ -۸ & -۱۰ & ۴\end{bmatrix}$$

به این نوع ضرب، «**ضرب اسکالر**» هم گفته می‌شود.

مثال: الف) محاسبات زیر را انجام داده و نتایج مشاهده شده را بنویسید.

$$-۱\times\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۰ & -۴ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad ۰\times\begin{bmatrix}۷ & -۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad ۳\times\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

ب) با تکمیل ماتریس سمت راست در زیر، برعکس ضرب اسکالر (فاکتورگیری از عدد) در ماتریس‌ها را انجام دهید:

$$\begin{bmatrix}-۶ & ۳ & ۹\\ ۰ & -۱۸ & ۴\end{bmatrix}=۳\times\begin{bmatrix}-۲ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

پاسخ

الف) ضرب‌ها به روش گفته شده انجام می‌شوند:

$$-۱\times\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۰ & -۴ & ۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & -۳\\ ۰ & ۴ & -۶\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad ۰\times\begin{bmatrix}۷ & -۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad ۳\times\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$

می‌بینید که:

ضرب عدد -۱ در ماتریس، تمام درایه‌ها را قرینه می‌کند. دو خاصیت ساده‌ی دیگر هم مشاهده می‌شود:

$$۰\times A=\overline{O} \quad \text{و} \quad r\times\overline{O}=\overline{O}$$

ب) واضح است که هر درایه باید بر «عدد فاکتور گرفته شده» تقسیم شود:

$$\begin{bmatrix}-۶ & ۳ & ۹\\ ۰ & -۱۸ & ۴\end{bmatrix}=۳\times\begin{bmatrix}-۲ & ۱ & ۳\\ ۰ & -۶ & \frac{۴}{۳}\end{bmatrix}$$

حالت ویژه:

حاصل ضرب $A(-۱)$ که در آن تمام درایه‌ها، قرینه‌ی درایه‌های نظیر در ماتریس A هستند را با $-A$ نشان داده و بــه آن «**قرینه‌ی**» ماتریس A گویند. بعلاوه:

خاصیت ماتریس قرینه:

حاصل جمع هر ماتریس با قرینه‌ی خود، ماتریس صفر است:

$$\boxed{A+(-A)=(-A)+A=\overline{O}}$$

مثال: اگر تساوی $\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ۳ \\ -۱ & -n \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} n+۲ & ۰ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ برقرار باشد، مقادیر m و n را بیابید.

پاسخ

عبارت سمت چپ را محاسبه کرده و با ماتریس سمت راست برابر قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} m-۲n-۴ & ۳-۰ \\ -۱-۲ & -n+۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} m-۲n-۴=۲ \\ -n+۲=۴ \rightarrow n=-۲ \end{cases}$$

با جایگذاری $n=-۲$ در معادله‌ی اول، خواهیم داشت:

$$m-۲(-۲)-۴=۲ \Rightarrow m=۲$$

ویژگی‌های ضرب عددی:

موارد زیر به آسانی از تعریف این نوع ضرب حاصل می‌شوند:

- $۰A=\overline{O}$، $r\overline{O}=\overline{O}$ و $۱A=A$. (r عدد دلخواه)
- اگر r یک عدد و A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند:

$$r(A\pm B)=rA\pm rB$$

- اگر r و s دو عدد دلخواه باشند:

$$r(sA)=(rs)A \quad \text{و} \quad (r\pm s)A=rA\pm sA$$

- بدیهی است که می‌توان عددی چون r را در دو طرف تساوی ماتریسی ضرب کرد:

$$A=B \Rightarrow rA=rB$$

اما حذف ضریب از دو طرف فقط با شرط غیر صفر بودن آن ممکن است:

$$rA=rB\ ,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

اگر A و B دو ماتریس هم‌مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA=rB$، آنگاه داریم: $A=B$.

(درست ☐ - نادرست ☐)

پاسخ

درست است؛ زیرا، طبق شرط $r\neq ۰$، عدد $\frac{۱}{r}$ وجود دارد و بنابراین:

$$rA=rB \xrightarrow{\frac{1}{r}\times} \frac{1}{r}\times rA=\frac{1}{r}\times rB \rightarrow 1A=1B \Rightarrow A=B$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 9\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس X را از معادله‌ی $3A+\frac{X}{2}=2B$ به‌دست آورید.

پاسخ

با توجه به معادله‌ی داده شده:

$$3A+\frac{X}{2}=2B \rightarrow \frac{X}{2}=2B-3A \xrightarrow{\times 2} X=4B-6A$$

$$\rightarrow X=4\begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\ 2 & 5 & 9\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4-6 & 0-12 & 16+6\\ 8-0 & 20-18 & 36+12\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-10 & -12 & 22\\ 8 & 2 & 48\end{bmatrix}$$

پاسخ دهید (۲)

۱- اگر $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & b\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c & -1\\ d & 2\end{bmatrix}$، آنگاه مقدار $a+b+c+d$ را تعیین کنید.

۲- برای ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases}3i-j & i\leq j\\ 3-i & i>j\end{cases}$، ماتریس $-3I+2A$ را بیابید.

۳- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix}$ داده شده‌اند. ماتریس C صادق در تساوی $A+3B-2C=\overline{O}$ را بیابید.

۴- ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & -x\\ -1 & y\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}3z & -2\\ -\frac{1}{2} & 4\end{bmatrix}$ در تساوی $A=-2(I-B)$ صدق می‌کنند. حاصل $x-2y-z$ را به‌دست آورید.

۵- خواص زیر را اثبات کنید. (A و B دو ماتریس دلخواه و هم‌مرتبه)

الف) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

ب) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

۳ ضرب ماتریس‌ها

روش انجام ضرب دو ماتریس را در سه گام بیان می‌کنیم.

گام اول:

ضرب یک سطر در یک ستون (**با تعداد درایه‌های برابر**) به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$[a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

برای نمونه؛

$$[۲ \;\; -۱ \;\; ۳]\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = (۲)(۱) + (-۱)(-۲) + (۳)(-۳) = ۲ + ۲ - ۹ = -۵$$

توجه کنید:

حاصل ضرب سطر در ستون، یک عدد است. (در واقع یک ماتریس از مرتبه‌ی ۱×۱)

گام دوم:

ضرب یک سطر در یک ماتریس دلخواه، به‌ترتیب از ضرب آن سطر در تمام ستون‌های ماتریس دوم به‌دست می‌آید.

بعلاوه:

عددهای به‌دست آمده به ترتیب، در یک ماتریس سطری قرار می‌گیرند.

برای نمونه؛

$$[۲ \;\; -۱ \;\; ۳]\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = [(۲)(۱) + (-۱)(-۲) + (۳)(-۳) \quad (۲)(۰) + (-۱)(۳) + (۳)(۲)] = [-۵ \quad ۳]$$

مثال: در معادله‌ی ماتریسی $[۳x \;\; ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$، مقدار x را به‌دست آورید.

پاسخ

ابتدا ضرب دو ماتریس سمت چپ به روش بالا:

$$[۳x \;\; ۲]\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix} = [۳x \times ۱ + ۲ \times (-۳) \quad ۳x \times (-۲) + ۲ \times ۶] = [۳x - ۶ \quad -۶x + ۱۲]$$

اکنون ماتریس حاصل را در ماتریس سوم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۳x-۶ & -۶x+۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \rightarrow (۳x-۶)(-۱)+(-۶x+۱۲)(۱)=۰$$

$$\rightarrow -۳x+۶-۶x+۱۲=۰ \rightarrow -۹x=-۱۸ \Rightarrow x=۲$$

حالت کلیِ ضرب دو ماتریس چنین است:

گام سوم:

در حالت کلی، ضرب ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ در $B=[b_{ij}]_{n\times p}$، از ضرب هر یک از سطرهای ماتریس اول در هر یک از ستون‌های ماتریس دوم به‌دست می‌آید. به‌عبارت دقیق‌تر:

اگر $C=AB$، آنگاه درایه‌ی c_{ij} از ماتریس C عبارت است از:

$$c_{ij}=[A \text{ سطر } i \text{ ام}]\times[B \text{ ستون } j \text{ ام}]$$

این ضرب با نماد ریاضی چنین بیان می‌شود:

$$c_{ij}=\sum_{k=۱}^{n} a_{i,k}\,b_{k,j}=a_{i,۱}b_{۱,j}+a_{i,۲}b_{۲,j}+a_{i,۳}b_{۳,j}+\cdots+a_{i,n}b_{n,j}$$

توجه کنید: (مهم)

شرط آن‌که ضرب AB انجام شود این است که:

تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد.

بعلاوه:

ماتریس حاصل، یعنی AB، تعداد سطرها را از A و تعداد ستون‌ها را از B می‌گیرد:

$$A_{m\times n}\times B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

برابر

(در ضرب بالا، تعداد ستون A با تعداد سطر B یکسان برابر n بوده و C، تعداد m سطر و p ستون دارد.)

مثال: برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۳ \\ ۱ & ۱ & ۴ \\ ۵ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۵ & ۹ \end{bmatrix}$، کدام‌یک از ضرب‌های AB و BA قابل محاسبه است؟ هر کدام که قابل انجام است، C نامیده و سپس درایه‌های $c_{۲,۱}$ و $c_{۳,۲}$ را در صورت امکان مشخص نمایید.

پاسخ

توجه کنید ضرب AB قابل انجام نیست؛ چون تعداد ستون‌های A برابر ۳ و تعداد سطرهای B برابر ۲ بوده و این دو عدد برابر نیستند. ولی ضرب BA را می‌توان انجام داد:

$$C=B_{۲\times۳}\times A_{۳\times۳} \Rightarrow C_{۲\times۳}$$

اکنون درایه‌های مورد نظر:

- برای محاسبه‌ی $c_{۲,۱}$ باید سطر دوم ماتریس B در ستون اول ماتریس A ضرب شود:

$$c_{2,1}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}=2\times 2+5\times 1+9\times 5=54$$

- چون ماتریس C از مرتبه‌ی 2×3 است، در آن درایه‌ی $c_{3,2}$ وجود ندارد.

مثال: برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}2 & a-b\\ -3 & 2b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$، می‌دانیم $AB=BA$ است. مقدار $2b-a$ را حساب کنید.

پاسخ

ماتریس‌های AB و BA را محاسبه کرده و برابر قرار می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & a-b\\ -3 & 2b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+a-b & 6+2a-2b\\ 0+2b & -9+4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b & 6+2a-2b\\ 2b & -9+4b\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & a-b\\ -3 & 2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-9 & 0+6b\\ 2-6 & a-b+4b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9 & 6b\\ -4 & a+3b\end{bmatrix}$$

در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}2b=-4 \rightarrow b=-2\\ a-b=-9 \xrightarrow{b=-2} a=-11\end{cases}\Rightarrow\ 2b-a=-4-(-11)=7$$

مثال: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ با $a_{ij}=\begin{cases}i^2-1 & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب ماتریسی $A\times B$ را به‌دست آورید.

پاسخ

ماتریس A را طبق ضابطه‌ی داده شده مشخص می کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1^2-1 & 2-1 & 3-1\\ 2-1 & 2^2-1 & 2-1\\ 3-1 & 2-1 & 3^2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}$$

اکنون ضرب انجام می‌شود:

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\times 2+1\times(-1)+2\times 2 & 0\times 1+1\times 3+2\times 0 & 0\times 0+1\times 2+2\times 5\\ 1\times 2+3\times(-1)+1\times 2 & 1\times 1+3\times 3+1\times 0 & 1\times 0+3\times 2+1\times 5\\ 2\times 2+1\times(-1)+8\times 2 & 2\times 1+1\times 3+8\times 0 & 2\times 0+1\times 2+8\times 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 3 & 12\\ 1 & 10 & 11\\ 19 & 5 & 42\end{bmatrix}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

پاسخ

چون A ماتریس قطری است:

$$m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \quad و \quad n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱$$

بعد از جایگذاریِ مقادیر، ضرب را انجام می‌دهیم:

$$AB=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ضرب:

اگر A، B و C سه ماتریس و I و $\overline{O}$ به‌ترتیب ماتریس‌های همانی و صفر باشند، به‌شرط آن که ضرب‌های زیر قابل انجام باشند:

- $A\times B$ و $B\times A$ ممکن است برابر نباشند؛ در نتیجه:

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.

دقیقاً یعنی:

اگر ضرب‌های AB و BA انجام شوند، آنگاه:

ممکن است تساوی $AB=BA$ برقرار باشد یا برقرار نباشد.

- $AI=IA=A$ و $A\overline{O}=\overline{O}A=\overline{O}$.

به صورت دقیق‌تر:

اگر A ماتریسی از مرتبه‌ی $m\times n$ باشد، آنگاه:

$$I_mA=A \quad و \quad AI_n=A$$

- $A(B+C)=AB+AC$ و $A(B-C)=AB-AC$. یعنی ضرب نسبت به جمع توزیع‌پذیر است.
- خاصیت شرکت‌پذیری برای ضرب برقرار است؛ یعنی اگر ضرب‌های زیر ممکن باشند، تساوی برقرار است:

$$(AB)C=A(BC)$$

پس:

ضرب ABC با معنی بوده و به یکی از دو روش تساوی بالا، قابل محاسبه است.

- ضریب عددی می‌تواند در بین عوامل ضرب ماتریس‌ها جابجا شود: ($r\in\mathbb{R}$)

$$(rA)B=A(rB)=r(AB)$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس ABA را در صورت وجود بیابید.

پاسخ

ابتدا ماتریس AB را حساب می‌کنیم:

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & -5 & 13 \\ 2 & 0 & -8 \\ -7 & -15 & -5 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس حاصل از چپ در A ضرب می‌شود:

$$ABA=(AB)A=\begin{bmatrix} -6 & -5 & 13 \\ 2 & 0 & -8 \\ -7 & -15 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -33 \\ 0 & 22 \\ -3 & 22 \end{bmatrix}$$

مثال: (تمرین کتاب) اگر $A=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری و B ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد، ماتریس $A\times B$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

پاسخ

ماتریس B را به صورت مجهول نوشته و ضرب را حساب می‌کنیم:

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\times b_{11} & r_1\times b_{12} & r_1\times b_{13} \\ r_2\times b_{21} & r_2\times b_{22} & r_2\times b_{23} \\ r_3\times b_{31} & r_3\times b_{32} & r_3\times b_{33} \end{bmatrix}$$

چنان که می‌بینید،

عدد r_1 در سطر اول، عدد r_2 در سطر دوم و عدد r_3 در سطر سوم ماتریس B ضرب می‌شود.

نتیجه: (مهم)

در ضرب ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ در ماتریس هم‌مرتبه‌ی خود مانند B، رابطه‌ی $AB=rB$ برقرار است، زیرا:

$$A\times B=\begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r\times b_{11} & r\times b_{12} & r\times b_{13} \\ r\times b_{21} & r\times b_{22} & r\times b_{23} \\ r\times b_{31} & r\times b_{32} & r\times b_{33} \end{bmatrix}=rB$$

البته توجه کنید:

چون $A=rI$ است، برای خاصیت بالا، دلیل کوتاه هم می‌توان نوشت:

$$AB=(rI)B=r(IB)=rB$$

بعلاوه:

ضرب ماتریس اسکالر با هر ماتریس دلخواه هم‌مرتبه جابجایی است.

زیرا:

$$BA = B(rI) = r(BI) = rB \quad \Rightarrow \quad AB = BA$$

توان رسانی ماتریس‌ها:

ضرب یک ماتریس در خودش فقط هنگامی امکان‌پذیر است که آن ماتریسی مربعی باشد. زیرا برای ضرب $A_{m\times n}$ در خودش، طبق شرط ضرب پذیری:

$$A_{m\times n} \times A_{m\times n} \quad \text{ضرب قابل انجام:} \quad \Rightarrow \quad n = m$$

در این‌صورت $A\times A$ را با $A^۲$ نشان می‌دهیم. توان‌های بزرگ‌تر A نیز به آسانی به‌دست می‌آیند:

$$A^۳ = A^۲ \times A \,,\ A^۴ = A^۳ \times A \,,\ \dots$$

مثال: در مورد ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، ماتریس $(A-۲B)^۲$ را به‌دست آورید.

پاسخ

ابتدا ماتریس $A-۲B$ را تعیین کرده و سپس آن را در خودش ضرب می‌کنیم:

$$A-۲B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲-۲ & -۲-۶ \\ ۰+۲ & ۶-۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۸ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad (A-۲B)^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & -۸ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & -۸ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰-۱۶ & ۰-۱۶ \\ ۰+۴ & -۱۶+۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۶ & -۱۶ \\ ۴ & -۱۲ \end{bmatrix}$$

مثال: اگر برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$، تساوی $A^۲ = \alpha A + \beta I$ برقرار باشد، مقادیر α و β را به‌دست آورید.

پاسخ

ابتدا ماتریس $A^۲$ را مشخص می‌کنیم:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

اکنون تساوی داده شده را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۹ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\alpha & ۳\alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & ۰ \\ ۰ & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\alpha+\beta & ۳\alpha \\ \alpha & \alpha+\beta \end{bmatrix}$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \alpha = ۳ \\ \alpha+\beta = ۴ \rightarrow ۳+\beta = ۴ \Rightarrow \beta = ۱ \end{cases}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-1 & |i-j|>1\\ 0 & |i-j|=1\\ 1 & |i-j|<1\end{cases}$ باشد، ماتریس A^2-2I را به‌دست آورید.

پاسخ

با قدری دقت ماتریس A نوشته می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\to A^2=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1&0&-1-1\\0&1&0\\-1-1&0&1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$A^2-2I=\begin{bmatrix}2&0&-2\\0&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&-1&0\\-2&0&0\end{bmatrix}$$

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^3 را به‌دست آورده و نتیجه را بیان کنید.

پاسخ

چون A ماتریس قطری است، طبق خاصیتی که کمی بالاتر دیدیم:

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)\times(-2)&(-2)\times 0&(-2)\times 0\\3\times 0&3\times 3&3\times 0\\4\times 0&4\times 0&4\times 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A^2=\begin{bmatrix}(-2)^2&0&0\\0&3^2&0\\0&0&4^2\end{bmatrix}$$

با ادامه خواهیم دید:

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}(-2)^2&0&0\\0&3^2&0\\0&0&4^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)^3&0&0\\0&3^3&0\\0&0&4^3\end{bmatrix}$$

نتیجه:

توان‌رسانی ماتریس قطری به آسانی انجام می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}a^n&0&0\\0&b^n&0\\0&0&c^n\end{bmatrix}$$

مثال: برای $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$، هر دو ماتریس A^{1000} و B^{1000} را مشخص کنید.

پاسخ

ماتریس را به صورت $A=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{B}=\frac{1}{2}B$ نوشته و می‌بینید:

$$B^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix} \rightarrow B^3=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix} \rightarrow B^4=\begin{bmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{bmatrix}$$

با ادامه‌ی این روند خواهیم داشت: $B^{1000}=\begin{bmatrix}2^{999} & 2^{999}\\ 2^{999} & 2^{999}\end{bmatrix}$، در نتیجه:

$$A^{1000}=(\frac{1}{2}B)^{1000}=(\frac{1}{2})^{1000}\times B^{1000}=\frac{1}{2^{1000}}\begin{bmatrix}2^{999} & 2^{999}\\ 2^{999} & 2^{999}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2^{999}}{2^{1000}} & \frac{2^{999}}{2^{1000}}\\ \frac{2^{999}}{2^{1000}} & \frac{2^{999}}{2^{1000}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=A$$

اتحاد در ماتریس‌ها:

در حالت کلی، اتحادها در مورد ماتریس‌ها برقرار نیستند. برای مثال، در محاسبه‌ی $(A+B)^2$ باید ضرب را به صورت معمولی انجام دهیم:

$$(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

بعلاوه؛

اگر دو ماتریس طوری داده شوند که $AB=BA$ ، آنگاه تمام اتحادها در مورد آن دو برقرار خواهند بود.

برای نمونه، با فرض $AB=BA$ داریم:

$$(A+B)^2=A^2+AB+\underbrace{BA}_{=AB}+B^2=A^2+2AB+B^2$$

به صورت مشابه، برقراری اتحاد مزدوج:

$$(A+B)(A-B)=A^2\underbrace{-AB+BA}_{-AB+AB=\overline{O}}-B^2=A^2-B^2$$

بررسی یک نمونه در حالت جابجایی نبودن:

مثال: اگر بدانیم $A-B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$، $A^2=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 9 & 7\end{bmatrix}$ و $B^2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 5 & 7\end{bmatrix}$ است، حاصل $AB+BA$ را مشخص کنید.

پاسخ

مشابه بالا به آسانی خواهیم دید:

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2=A^2-(AB+BA)+B^2$$

بنابراین $AB+BA=A^{۲}+B^{۲}-(A-B)^{۲}$ است، چون:

$$(A-B)^{۲}=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$AB+BA=\begin{bmatrix}۷ & ۳\\ ۹ & ۷\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۵ & ۷\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱۳ & ۱۲\\ ۱۲ & ۱۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶ & -۸\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

پاسخ دهید (۳)

۱- اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۰ & -۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A\times B-B\times A$ را مشخص کنید.

۲- مجموع جواب‌های معادله‌ی ماتریسی $[x^{۲}+۲x \quad ۱]\begin{bmatrix}-۱ & ۰\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{۲}+۲x\\ ۱\end{bmatrix}=۰$ را به‌دست آورید.

۳- اگر $A=\begin{bmatrix}a & ۴\\ -۱ & b\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۲ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به‌دست آورید که ماتریس $A\times B$ قطری باشد. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱)

۴- اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم: $AB=AC$، آنگاه لزوماً $B=C$ است. (درست ☐ - نادرست ☐) (نهایی؛ خرداد ۹۸)

۵- اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & ۳\\ y & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$ جابجایی باشد، مقدار $x-۲y$ را به‌دست آورید.

۶- با فرض $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $A^{۳}+۲I$ را به‌دست آورید. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴)

۷- برای ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی سه A و B با تعاریف $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i+j=۲k\\ ۰ & i+j=۲k-۱\end{cases}$ و $b_{ij}=\begin{cases}-۱ & i\le j\\ ۰ & i>j\end{cases}$، ماتریس $(A+B)^{۲}$ را بیابید.

۸- با فرض $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$، ماتریس‌های $A^{۲}$، $A^{۳}$ و $A^{۷}$ را بیابید.

۹- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)

الف) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه‌ی آن باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها تعویض‌پذیر است.

ب) اگر $A=\begin{bmatrix}-۲ & ۵\\ -۴ & ۱۰\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $A^{۱۴۰۳}=I$.

۱۰- اگر ضرب دو ماتریس A و B جابجایی باشد، نشان دهید:

الف) $(AB)^{۲} = A^{۲}B^{۲}$

ب) اتحاد مربع تفاضل دو جمله برای این دو ماتریس برقرار است.

منتخب کتاب:

۱- اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times ۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۲\times ۳}$ به صورت زیر داده شده باشند، ابتدا هر دو ماتریس را با درایه‌هایشان نوشته و سپس $A\times B$ و $B\times A$ را به‌دست آورید.

$$a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases} \quad \text{و} \quad b_{ij}=\begin{cases} i^{۲}+۱ & i=j \\ i+j & i>j \\ i-j+۲ & i<j \end{cases}$$

۲- اگر ضرب دو ماتریس A و B جابجایی باشد، ثابت کنید:

الف) $(A+B)^{۲}=A^{۲}+۲AB+B^{۲}$

ب) $(A+B)(A-B)=A^{۲}-B^{۲}$

۳- دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A\neq \overline{O}$ و $B\neq \overline{O}$، ولی $AB=\overline{O}$.

۴- با یک مثال نقض نشان دهید که قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر:
نشان دهید که در حالت کلی از تساوی $AB=AC$ نمی‌توان نتیجه گرفت $B=C$ است.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴